

## Einige experimentelle Untersuchungen der elektrischen und optischen Vorgänge beim Funkendurchschlag in Gasen.

Von EWALD FÜNFER, Weil a. Rhein.

Mit 17 Textabbildungen.

(Eingegangen am 13. August 1948.)

### Einleitung.

Als Funken soll im folgenden eine stromstarke, kurzzeitige Kondensatorentladung gelten. Sie soll über eine Gasstrecke bei Atmosphärendruck und darüber und bei Schlagweiten über 1 cm erfolgen. Für diesen Fall weiß man z. B. aus den Nebelkammeraufnahmen von RAETHER [1], daß die TOWNSENDSche Theorie der Mehrfachlawinen nicht gültig ist, sondern daß der Vorgang der Zündung durch den von RAETHER [1] und LOEB und MEEK [2] entwickelten Mechanismus des Kanalaufbaus zu ersetzen ist. Danach genügt bereits die erste Lawine zur Entwicklung eines die Elektroden überbrückenden schwachleitenden Funkenkanals. Dies ist dadurch zu erklären, daß das Raumladungsfeld des Lawinenkopfes mit dem an die Funkenstrecke angelegten äußeren Feld vergleichbar wird. Außerdem wird die Ionendichte im Kopf so groß, daß dort eine kräftige photoionisierende Strahlung entsteht, die in nächster Umgebung absorbiert wird und neue Ionen liefert. Dies führt zu einer Umbildung der Lawine in einen leitenden Kanal, der mit Geschwindigkeiten von  $10^7$ – $10^8$  cm/sec vom Lawinenkopf zur Kathode und Anode wächst und damit die Zündung bewirkt. Über diesen Kanal entlädt sich nun der Kondensator und heizt ihn außerordentlich schnell zu einem gutleitenden Plasma mit sehr hoher Temperatur auf. Zu diesem Zeitpunkt beginnt die intensive, für den Funken charakteristische Lichtemission, deren Anstieg weitgehend durch die Eigenschaften des Entladungskreises bedingt ist, während das Abklingen der Strahlung hauptsächlich zu einer Zeit erfolgt, wo der Kondensator schon entladen ist und die Zeitkonstante des Lichtabfalls durch den Abbau des Funkenplasmas gegeben ist. Theoretisch sind diese Verhältnisse eingehend diskutiert in einer Arbeit von WEIZEL und ROMPE [3]. Für den inneren Teil des Funkenkanals nehmen WEIZEL und ROMPE Elektronentemperaturen von mehr als 50000° K an. Aus experimentellen Untersuchungen finden CRAGGS und MEEK [4] Temperaturen zwischen 10000–15000° K. Für die Leuchtdichte des Funkens wurden Werte von  $10^7$  bis  $10^8$  stilb gefunden [5], [6]. Die Leuchtdichte der Sonne mit  $10^5$  stilb und die der besten sonstigen irdischen Lichtquellen, der Quecksilberhöchstdrucklampen mit ebenfalls  $10^5$  stilb liegt also um 2–3 Größenordnungen tiefer. Die Dauer eines solchen Funkenblitzes kann außerordentlich kurz gehalten werden, größenordnungsmäßig  $10^{-6}$ – $10^{-7}$  sec. Während sich die eben gemachten Angaben hauptsächlich auf unbehinderte Entladungen im freien Gasraum beziehen, soll diese Arbeit einige Untersuchungen an Gleitfunken bringen [7], [8]. Dabei entsteht die Entladung längs der Oberfläche eines Isolators, dessen Eigenschaften auf die

Entladung von wesentlichem Einfluß sind. Beim Funken im freien Gasraum bedeutet die Überbrückung des Elektrodenzwischenraums durch den Kanal das Ende des Zündvorgangs, worauf nun die eigentliche stromstarke Entladung erfolgt. Entsprechend bildet sich beim Gleitfunken eine Vorentladung, die sog. Gleitentladung aus, die eine leitende Verbindung zwischen den Elektroden schafft. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung ist in dieser Arbeit unter verschiedenen Bedingungen gemessen worden. Die Lichtemission des Funkens, der sich an die Vorentladung anschließt wurde im Vergleich mit Funken in freier Luft untersucht, wobei sowohl der zeitliche Verlauf der gesamten sichtbaren Strahlung, als auch einzelner Teile des Spektrums gemessen wurde. Der wesentlichste Unterschied zwischen beiden Entladungsformen ist dabei der höhere Wirkungsgrad des Gleitfunken gegenüber dem Luftfunken, während sonstige wesentliche Unterschiede hauptsächlich in der Zündung der Entladung und nicht in der Lichtemission zu finden sind.

### Versuchsanordnung.

Die zeitliche Analyse der elektrischen Vorgänge am Funken, insbesondere der Spannungszusammenbruch wurde hauptsächlich mit einem Kaltkathodenstrahloszillographen durchgeführt. Die Registrierung der optischen Vorgänge erfolgte mit einem Multiplier in Glasgehäuse, dessen Photokathode ein Empfindlichkeitsmaximum bei etwa 4300 Å hatte. Zur Verstärkung der Impulse des Multipliers wurden Breitbandverstärker benützt, deren obere Grenzfrequenz bei den zu untersuchenden schnellen Vorgängen sehr hoch sein mußte, sie betrug in einigen Fällen 5 MHz. Für die Aufzeichnung des Vorgangs mußte ein Oszillograph hoher Schreibgeschwindigkeit benützt werden, wie z. B. das Hochleistungsrohr der AEG [9].

### Aufbau und Wirkungsweise verschiedener Typen von Gleitfunken.

Eine allgemein bekannte Anordnung zur Erzeugung von Gleitfunken gibt Abb. 1a wieder. Die Gleitfunkenstrecke  $F$  besteht aus dem Isolator (Glasplatte)  $G$ , und den beiden Elektroden  $E_1$  und  $E_2$ , die direkt auf  $G$  aufliegen. Der Stoßkreis, bestehend aus Kapazität  $C$ , Schaltfunken  $F_0$  und Widerstand  $R$ , wird über die Widerstände  $R$  solange aufgeladen, bis  $F_0$  zündet und damit an  $F$  eine Stoßspannung entsteht. Bei ausreichender Spannung entsteht damit eine auf der Glasoberfläche von  $E_1$  nach  $E_2$  vorwachsende Gleitentladung. Hat diese  $E_2$  erreicht, so ist der Kreis  $C$ ,  $F_0$ ,  $F$  geschlossen und  $C$  entlädt sich in einem hell leuchtenden Funken über  $F_0$  und  $F$  ( $R$  ist dabei so hochohmig gewählt, daß eine Entladung von  $C$  über  $R$



während des Vorganges der Gleitfunkenbildung keine Rolle spielt). Die Gleitentladung sendet sehr wenig sichtbares Licht aus, so daß sie im verdunkelten Raum beobachtet werden muß. Aus den photographischen Aufnahmen dieser Gleitentladungen erkennt man den Einfluß der Polarität auf die Form der Entladungsbahn, die im allgemeinen außerordentlich verästelt ist

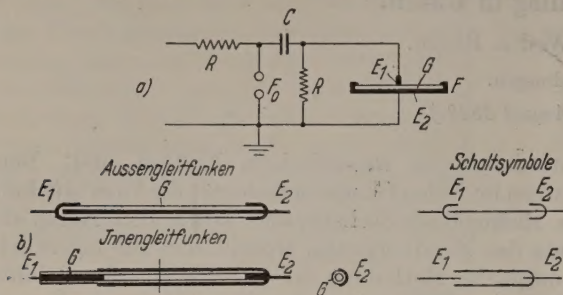


Abb. 1a u. b. a) Stoßanlage zur Erzeugung von Gleitfunken; b) technische Ausführung von Gleitfunkenstrecken.

und auf der ebenen Platte G keineswegs den kürzesten Weg von  $E_1$  nach  $E_2$  nimmt [7]. Für die folgenden Messungen der Vorwachsengeschwindigkeit der Gleitentladung war es nötig, den Entladungsweg genauer

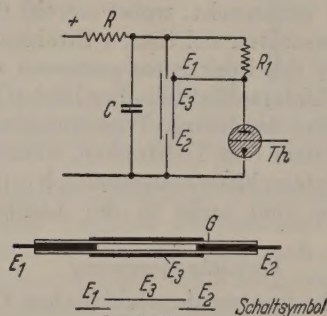


Abb. 2. [Zündung von Gleitfunken mit Sekundärkreis.

zu definieren. Auch für die praktische Anwendung des Gleitfunken als Lichtquelle ist eine Begrenzung der Funkenbahn erforderlich. Die dazu benutzten Gleitfunkenstrecken zeigt Abb. 1b.

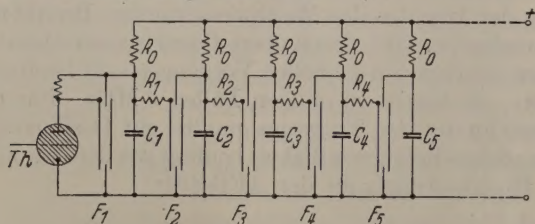


Abb. 3. Gleitfunkenzeitlupe.  $F_1, F_2 \dots$  Gleitfunkenstrecken.

An Stelle der ebenen Glasplatte wird hierbei eine Glaskapillare benutzt. Je nach der Anordnung der Elektroden läßt sich die Entladung dabei auf der äußeren oder inneren Oberfläche der Kapillaren erzeugen. Die bessere Definition der Entladungsbahn wird beim Innengleitfunken erzielt. Man kann dabei eine wirkungsvolle Einschnürung des Funkens erreichen. Weiterhin hat man bequem die Möglichkeit, an Stelle von Luft andere Gase unter verschiedenem Druck zu verwenden. Die das Glasrohr außen umschließende Elektrode kann dabei etwa die eine Hälfte des Umfangs bedecken und die andere Hälfte für den Lichtaustritt freigeben. Diese Elektrode kann außerdem als Spiegelbelag ausgebildet sein. Ist dieser Belag

bis auf einen schmalen Spalt geschlossen, so hat man in diesem Spalt eine sehr gleichmäßig ausgeleuchtete Lichtquelle von extremer Leuchtdichte.

### Zündung von Gleitfunken mit Sekundärkreis.

Bei dem obigen Zündverfahren wird ein Spannungsstoß an der Gleitfunkenstrecke benötigt. Dabei liegt eine Schaltfunkenstrecke  $F_0$  in Serie mit dem Gleitfunken. Dies ist aus mehreren Gründen nicht immer vorteilhaft. Zunächst ist der Entladungsvorgang im Gleitfunken auch durch die Vorgänge im Schaltfunken mitbedingt, dessen intensives Licht außerdem bei optischen Untersuchungen des Gleitfunken abgeschirmt werden muß. Weiterhin ist die Bestimmung des Anfangspotentials bei der die Gleitentladung beginnt nur durch eine Reihe von zusätzlichen Messungen möglich. Eine in mehrfacher Hinsicht zweckmäßigere Art der Zündung soll an Hand der Abb. 2 erläutert werden. Der Kondensator C wird über R aufgeladen. Seine beiden Enden liegen direkt an den Elektroden  $E_1$  und  $E_2$  der Gleitfunkenstrecke. Der Gegenbelag auf der Außenseite des Glasrohrs ist jedoch nicht mehr wie seither mit  $E_2$  verbunden, sondern bildet eine eigene Elektrode  $E_3$ , die Zündelektrode genannt werden soll.

Sie ist über einen hochohmigen Widerstand  $R_1$  mit der auf Spannung befindlichen Elektrode  $E_1$  verbunden. Um die Zündung einzuleiten, wird das Thyatron Th gezündet, wodurch  $E_3$  annähernd auf das Potential von  $E_2$  gebracht wird. Zwischen  $E_3$  und  $E_1$  tritt also eine Stoßspannung auf, was zum Einsetzen der Gleitentladung führt. An Stelle des Thyatrons kann natürlich auch eine normale Funkenstrecke benutzt werden. Bei Anwendung des Thyatrons ist man mit der Polarität festgelegt, d. h.  $E_1$  muß immer positiv aufgeladen werden. Alle folgenden Versuche sind so ausgeführt worden, worauf deshalb hingewiesen werden muß, weil der Einfluß der Polarität auf die Eigenschaften der Gleitentladung wesentlich ist. Zur Synchronisierung des Funkens mit irgendwelchen anderen Vorgängen beispielsweise dem Zeitablauf eines Oszillographen ist diese Art der Zündung sehr bequem. Die Spannung liegt statisch an der Gleitfunkenstrecke, und der Funke entsteht exakt bei der vorgegebenen Aufladespannung des Kondensators. Diese Methode soll im folgenden als Zündung mit Sekundärkreis —  $E_3$ , Thyatron,  $R_1$  — bezeichnet werden. Diese Schaltung läßt sich sehr leicht zu einer einfachen Funkenzeitlupe erweitern, deren Schaltbild in Abb. 3 gezeigt wird. Die Schaltung enthält eine Reihe von Entladungskreisen  $C_1, F_1, C_2, F_2$  usw., die über die Widerstände  $R_0$  aufgeladen werden. Die Zündung des ersten Kreises erfolgt genau so wie bei Abb. 2 mit Hilfe des Thyatrons. Zur Zündung des zweiten Funkens  $F_2$  wird nun an Stelle eines Thyatrons der Funke  $F_1$  benützt. An  $F_1$  sinkt ja die Spannung nach Einsatz des Funkens sehr rasch auf 0. Dieser Spannungsstoß wird über den Widerstand  $R_1$  auf die Zündelektrode von  $F_2$  übertragen. Anschließend beginnt in  $F_2$  die Gleitentladung. Wenn diese den Elektrodenzwischenraum überbrückt hat, entsteht der stromstarke Funke und damit der plötzliche Zusammenbruch der Spannung an  $F_2$ . Dieser Stoß wird über  $R_2$  an die Zündelektrode von  $F_3$  übertragen, wo sich der gleiche Vorgang wiederholt. Auf diese Weise läßt sich eine Reihe von aufeinanderfolgenden Funken erzeugen. Die zeitlichen Abstände



ieser Funken sind gegeben, einmal durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung in jeder Funkenstrecke, weiterhin durch die Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  usw., welche die Steilheit der Stoßwelle bestimmen, die zum Auslösen des folgenden Funkens dient. Mit einer ausgeführten Anlage dieser Art ließen sich z. B. leicht Zeitabstände der Funken von einigen  $10^{-5}$  sec bis zu einigen  $10^{-7}$  sec erzielen.

Als Anwendung einer derartigen Zeitlupe zeigt Abb. 4 die Ausbreitung der Knallwellen eines Gleitfunken. Mit Hilfe des TOEPLERSchen Schlierenverfahrens sind zu fünf verschiedenen Zeitpunkten die von einer Gleitfunkenstrecke ausgehenden Knallwellen aufgenommen worden. Als Lichtquelle diente die oben beschriebene Funkenzeitlupe, als Quelle für die Erzeugung der Knallwelle wurde ein weiterer Gleitfunke benutzt, der auf der Glaskapillaren sprang. Die gewundene Bahn des Funkens ist als leuchtendes Band deutlich zu sehen. Als Folge dieser um die Glaskapillare mehrfach herumführenden Funkenbahn treten eine Reihe verschiedener Knallwellen auf den Abbildungen in Erscheinung.

#### Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung.

Mit Hilfe der eben beschriebenen Gleitfunkenzeitlupe ist es möglich, die Zeit zu messen, welche die Gleitentladung von einer Elektrode zur anderen braucht. Da der Elektrodenabstand bekannt ist, ergibt sich also damit die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung. Die Ausbreitungszeit einer Gleitentladung ist annähernd gegeben durch den Abstand zweier aufeinanderfolgenden Gleitfunken. Diese Zeit kann aus dem Fortschreiten der Knallwelle auf Abb. 4 gemessen werden, wenn die Geschwindigkeit der Knallwelle bekannt ist. Nach diesem Verfahren ist von TOEPLER [7] die Gleitgeschwindigkeit gemessen worden. Um von der Unsicherheit in der Bestimmung der Knallwellengeschwindigkeit frei zu sein, wurde im folgenden mit Photozelle und Oszillograph das Licht der einzelnen Gleitfunken in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge direkt gemessen. Abb. 5a zeigt zwei typische Oszillogramme von je 6 Gleitfunken in Luft bei Atmosphärendruck und einem Elektrodenabstand  $d$  gleich 10 cm. Abb. 5b enthält in Kurvenform die Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit  $v_m$  von der Aufladespannung  $U$  und den Widerständen  $R_1$ ,  $R_2$  ..., durch welche die Steilheit der Stoßfront bei der Zündung gegeben ist. Die höchsten Werte der Gleitgeschwindigkeit, welche für  $R_1$ ,  $R_2$  ... = 0 erhalten werden, entsprechen einer Stoßzeit, wie sie durch den Funkenzusammenbruch gegeben ist. Aus gleichzeitigen oszillographischen Aufnahmen des Spannungsverlaufs der Stoßwelle an der Zündelektrode und des Spannungsverlaufs an der damit zu zündenden Funkenstrecke ließ sich nachweisen, daß bis zu einer gewissen Grenze die Gleitgeschwindigkeit durch die Geschwindigkeit des Anwachsens der Stoßwelle gegeben ist. Je steiler die Stoßfront ist, um so weniger Einfluß hat sie auf die Gleitgeschwindigkeit. Die folgenden Messungen sind daher alle mit der steilsten möglichen Front, d. h. für  $R$  gleich Null durchgeführt worden. In Abb. 6 sind eine Reihe von Messungen

wiedergegeben, über die Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit von Spannung und Gasart für die Gase Luft, Argon und Wasserstoff. Die gefundenen Werte sind stark von den Versuchsbedingungen, insbesondere von Material- und Wandstärke der Glaskapillare

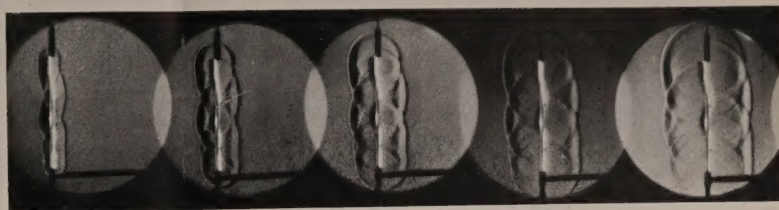


Abb. 4. Ausbreitung der Knallwellen eines Gleitfunken.

abhängig. Es lassen sich jedoch folgende Feststellungen machen: Die Gleitgeschwindigkeit ist in allen Fällen außerordentlich hoch; in der Größenordnung von  $10^7$  cm/sec. Sie nimmt sehr schnell mit steigender

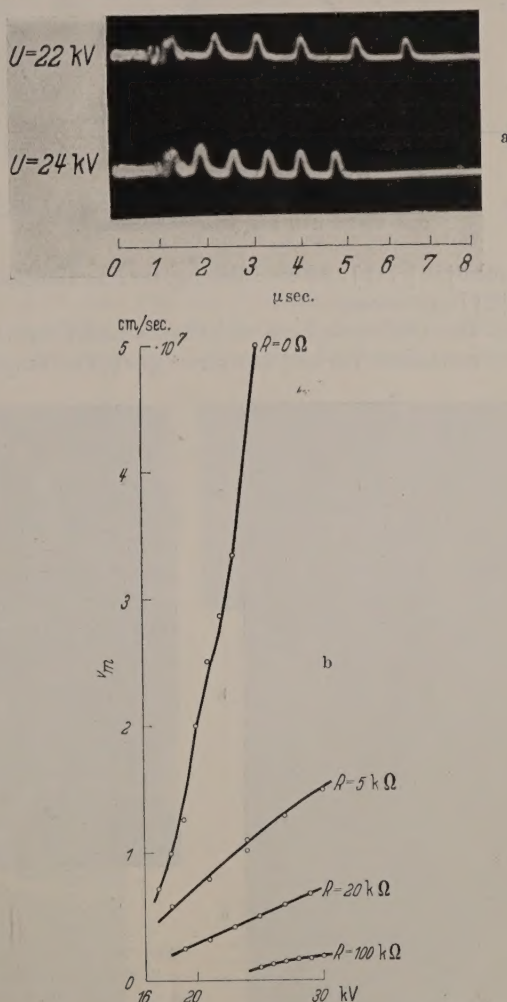


Abb. 5 a u. b. Innengleitfunken in Luft,  $d = 10$  cm,  $p = 760$  mm. a Oszillogramme des Lichtverlaufs; b Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit von Spannung und Steilheit der Stoßfront (abhängig von  $R$ ).

Spannung zu, außerdem hängt sie stark von der Gasart ab. Für Argon und Wasserstoff ist sie etwa doppelt so groß wie für Luft. Dagegen zeigten Versuche bei verschiedenem Druck innerhalb  $p$  gleich 200–760 mm geringe und innerhalb der Meßgenauigkeit liegende Abweichungen. Eine ausführliche Deutung dieser Ergebnisse soll hier nicht versucht werden. Es spricht jedoch vieles dafür, daß bei dem Vorgang der Gleit-



entladung eine photoionisierende Strahlung, wie sie bei einer Reihe anderer Entladungsvorgänge schon gefunden wurde eine ausschlaggebende Rolle spielt. Es sei dabei auf die Ausbreitung der Entladung in

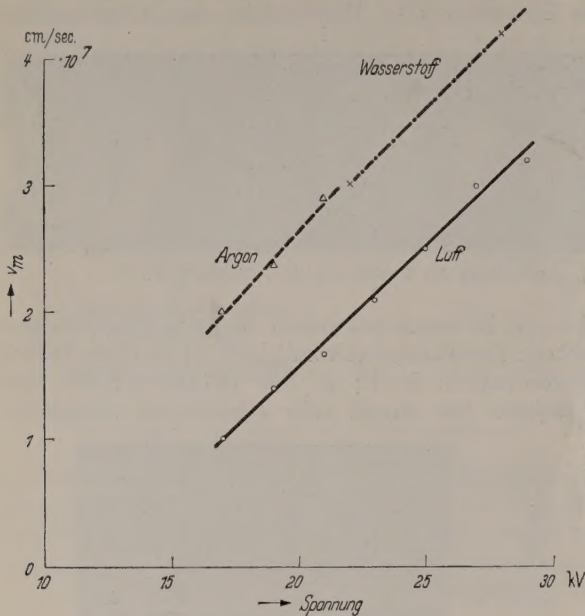


Abb. 6. Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung in Luft, Argon und Wasserstoff bei Atmosphärendruck.

Zählrohr [10], [11] und die Bildung der Kanalentladung [1], [2] hingewiesen.

Da die Gleitentladung sichtbares Licht emittiert, dessen zeitlicher Verlauf mit einer genügend empfind-

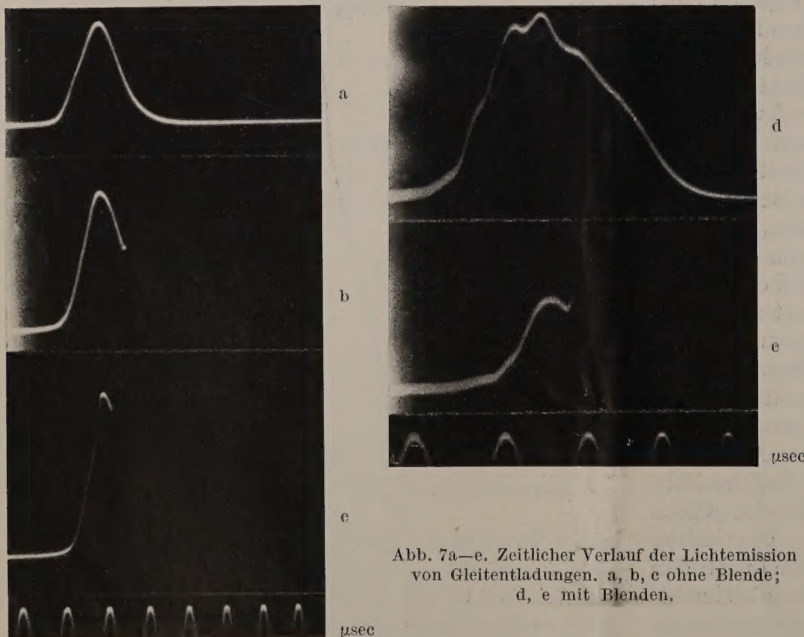


Abb. 7a—e. Zeitlicher Verlauf der Lichtemission von Gleitentladungen. a, b, c ohne Blende; d, e mit Blenden.

lichen Meßapparatur nachgewiesen werden kann, läßt sich damit eine direkte Methode zur Geschwindigkeitsmessung der Gleitentladung finden. Mit einem Multiplier wurde der zeitliche Verlauf der sichtbaren Strahlung einer Gleitentladung aufgenommen, was in Abb. 7 als Oszillogramm dargestellt ist. Das Oszillogramm in Abb. 7a wurde bei einer Spannung von 24 kV und  $d = 25$  cm gewonnen. Ein Funke tritt dabei noch nicht auf, die Gleitentladung überbrückt noch nicht

den Elektrodenabstand. Bei 25 kV (Abb. 7b), ist der sprunghafte Einsatz des Funkens auf dem abfallenden Ast der Gleitentladung deutlich zu sehen. Die Zeit vom Beginn des Leuchtvorgangs bis zum Einsatz des Funkens entspricht der Ausbreitungszeit der Gleitentladung. Mit zunehmender Spannung wird diese Zeit kleiner, wie es Abb. 7c bei 26 kV zeigt. Man erhält damit die gleichen Gleitgeschwindigkeiten, wie

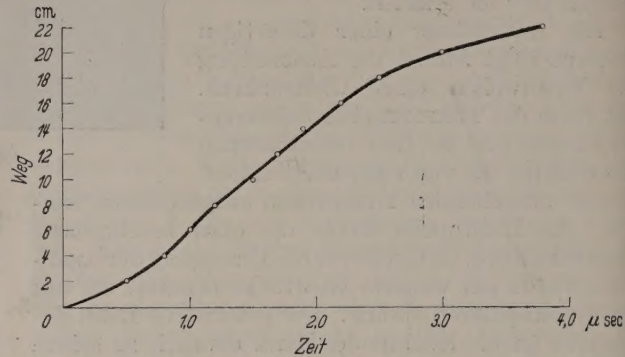


Abb. 8. Zeit-Weg-Diagramm einer Gleitentladung.  $d = 25$  cm,  $U = 15$  kV Luft;  $p = 760$  mm.

mit der vorher geschilderten Methode. Das Verfahren läßt sich zur Gewinnung von Zeit-Weg Kurven für die Gleitentladung erweitern. Es ist dabei nur nötig, das Licht der Gleitentladung an verschiedenen Stellen der Gleitbahn durch Blenden so abzudecken, daß von diesen Stellen aus kein Licht auf den Multiplier fällt. Man erhält dann Lichtkurven entsprechend Abb. 7d und e, die an den durch die Blenden markierten Stellen Unstetigkeiten zeigen. Aus den bekannten Blendenabständen läßt sich so das Zeit-Weg-Diagramm einer einzelnen Gleitentladung ermitteln, wie es in Abb. 8 dargestellt ist. Die Geschwindigkeit wächst bis zu einem Maximum an und fällt dann bis zum Ende der Reichweite ab.

#### Zeitliche Analyse der Lichtemission von Funken.

Während sich die bisherigen Untersuchungen mit den Vorgängen bei der Zündung beschäftigten, soll nun das eigentliche Funkenstadium untersucht werden. Nachdem die Gleitentladung, bzw. beim normalen Funken im freien Gasraum die Kanalentladung den Elektrodenzwischenraum überbrückt hat, entlädt sich der Kondensator über die dabei gebildete schwachleitende Bahn und heizt das Plasma außerordentlich schnell zu sehr hohen Temperaturen auf. Damit beginnt die eigentliche Licht-

ausstrahlung des Funkens während die Spannung an der Funkenstrecke in sehr kurzen Zeiten von  $10^{-7}$  sec und weniger zusammenbricht. Während des Zündvorgangs ist dagegen der Spannungsabfall am Funken kaum bemerkbar. Ist die Dämpfung des Entladungskreises einschließlich der Funkenstrecke gering, so schließt sich an den Spannungszusammenbruch ein Wechselstromlichtbogen an [12], dessen Frequenz bei der im allgemeinen sehr geringen



Abstinduktion des Kreises hoch ist und leicht einige Hz erreichen kann. Für dieses Bogenstadium ist die Schlagweite des Funkens wesentlich. Bei sehr kurzen Elektrodenabständen spielt die Bogensäule

Funkenwiderstandes ermitteln läßt. Als kleinste Funkenwiderstände findet man dabei Werte bis zu  $10^{-2} \Omega$ . Schaltet man in den gleichen Entladungskreis an Stelle einer gewöhnlichen Luftfunkenstrecke eine Gleit-

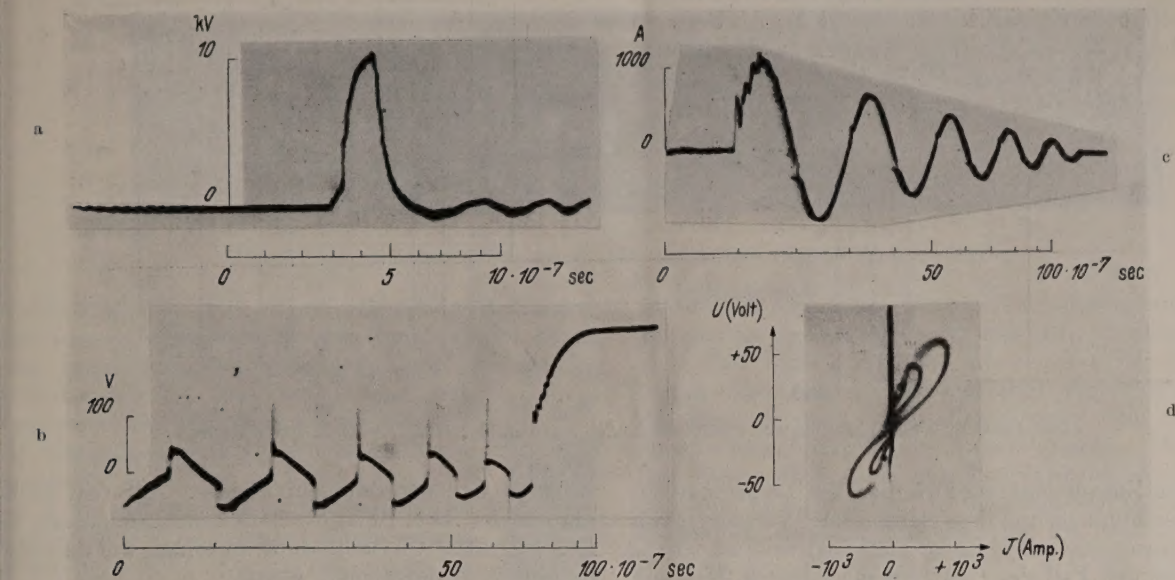


Abb. 9. Strom- und Spannungsverlauf an Luftfunken. a Spannung bei kleiner Ablenkempfindlichkeit; b Spannung bei großer Ablenkempfindlichkeit; c Stromverlauf; d Strom-Spannungscharakteristik.

ne untergeordnete Rolle, der Vorgang wird hauptsächlich von dem stromunabhängigen Kathodenfall beherrscht, man erhält eine mäandrierende Spannungscharakteristik. Bei großen Schlagweiten, wie sie insbesondere bei Gleitfunken üblich sind, ist die Bogensäule maßgebend, der Spannungsverlauf nähert sich der Sinusform.

Diese Verhältnisse sollen an Hand einiger typischer Oszillogramme wie sie Abb. 9 zeigt, erläutert werden. Oszillogramm 9a entspricht dem Spannungsverlauf zusammengebrochen an einer Luftfunkenstrecke bei kleiner Schlagweite ( $d=1$  cm). 9b ist mit sehr viel größerer Ablenkempfindlichkeit des Oszillographen aufgenommen und bringt den Spannungsverlauf nach dem eigentlichen Spannungszusammenbruch, den Wechselstromlichtbogen, der ohne den Kondensator vollständig zu entladen, nach einer bestimmten Zahl von Schwingungen abreißt, sobald die zur Wiederezündung nach jedem Tuldurchgang erforderliche Spannung nicht mehr zur Verfügung steht. Zur oszillographischen Aufnahme dieses Lichtbogens sind besondere Vorsichtsmaßnahmen erforderlich, wie sie von A. WALL-RAFF [12] beschrieben wurden. Der Stromverlauf im Oszillogramm 9c zeigt sinusförmigen Charakter, außerdem Zündspitzen, die bemerkenswerterweise nicht beim Wert 0 sondern etwas später auftreten. Gibt man, wie in Oszillogramm 9d geschehen, an die horizontalen Ablenkplatten des Oszillographen den Stromverlauf an die vertikalen Platten gleichzeitig den Spannungsverlauf, so erhält man eine Stromspannungscharakteristik des Funkens, die z. B. den Verlauf des

funkenstrecke, deren Länge etwa 10 cm gegenüber vorher 1 cm bei gleicher Entladespannung betragen kann, so erhält man die Oszillogramme der Abb. 10. Infolge der größeren Länge des Gleitfunkens ist die

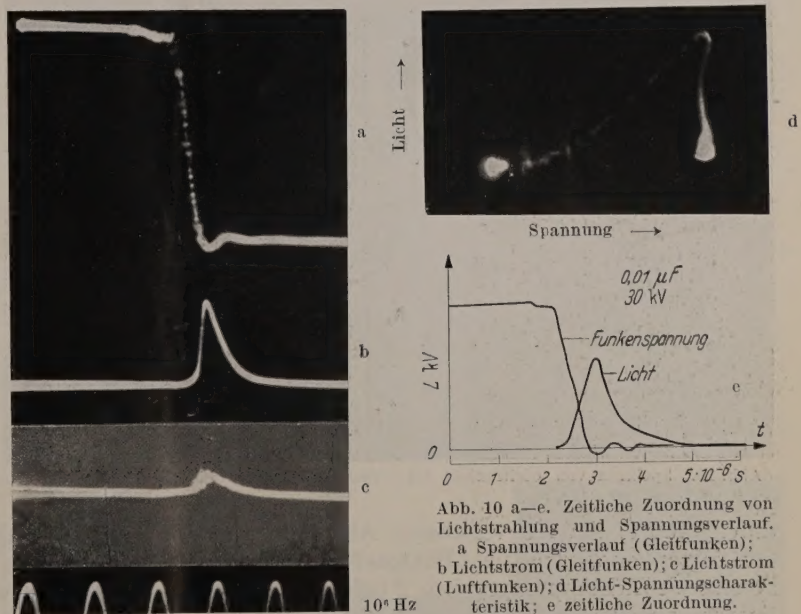


Abb. 10 a—e. Zeitliche Zuordnung von Lichtstrahlung und Spannungsverlauf. a Spannungsverlauf (Gleitfunken); b Lichtstrom (Gleitfunken); c Lichtstrom (Luftfunken); d Licht-Spannungscharakteristik; e zeitliche Zuordnung.

Dämpfung des Kreises beinahe aperiodisch geworden, was aus dem Spannungsverlauf in Abb. 10a zu ersehen ist. Diese Verhältnisse spiegeln sich auch bei der Lichtausstrahlung wieder. Abb. 10b gibt den mit der Photozelle aufgenommenen zeitlichen Lichtverlauf des Gleitfunkens, 10c den Lichtverlauf des Luftfunkens wieder, beide im vergleichbaren Maßstab. Während die Strahlung des Gleitfunkens keine Oszillationen zeigt, sind sie beim Luftfunken noch zu erkennen.



Dabei soll auf eine Tatsache hingewiesen werden, die später nochmals zur Sprache kommt. Die Spitzenhelligkeit des Gleitfunkens ebenso wie seine Lichtsumme sind um ein Mehrfaches größer als beim Luftfunken, und zwar bei gleicher aufgewandter Energie. Betrachtet man die Zeitdauer sowohl des Anstiegs der Strahlung bis zum Maximum als auch das Nachleuchten, so zeigt sich kein wesentlicher Unterschied zwischen Luftfunke und Gleitfunke. Um zu erkennen, wie der

als der Anstieg. Gegenüber der Strahlung des eigentlichen Funkens ist diejenige der vorangehenden Gleitentladung vollkommen zu vernachlässigen. Sie ist um

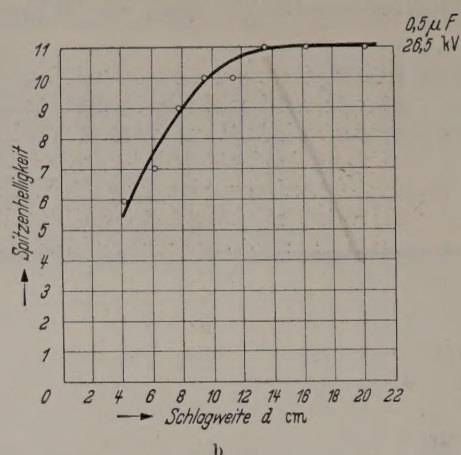
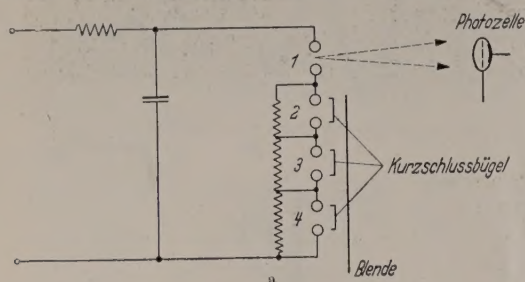


Abb. 11a u. b. a Serienschaltung von Funkenstrecken. b Spitzenhelligkeit als Funktion der Schlagweite.

zeitliche Zusammenhang zwischen der Lichtausstrahlung des Funkens und dem elektrischen Vorgang, etwa dem Spannungsverlauf an der Funkenstrecke ist, wurde z. B. für den Fall des Gleitfunkens folgende Messung

mehrere Größenordnungen kleiner. Auf den Lichtkurven der Abb. 10 ist deshalb keine Andeutung des Leuchtens der Gleitentladung zu sehen, wie dies etwa in Abb. 7 wiedergegeben wurde.

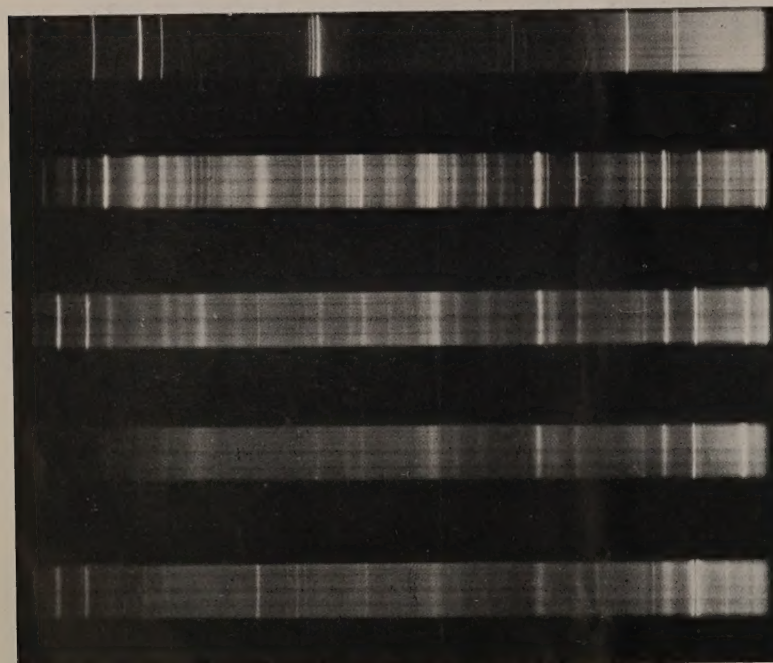


Abb. 12. Spektren von Gleitfunken bei verschiedener Einschnürung des Entladungskanals.

#### Optischer Wirkungsgrad eines Funkens.

Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, welchen Teil der im Kondensator aufgespeicherten elektrischen Energie in Strahlung insbesondere in sichtbare Strahlung umgesetzt wird, wurde der folgende Versuch durchgeführt. In einem Entladekreis (Abb. 11a) wurden an Stelle einer einzigen Luftfunkenstrecke mehrere kleinere Funkenstrecken in Serie geschaltet und mit hochohmigen Widerständen die Spannungsverteilung auf die einzelnen Strecken geregelt. Man mißt nun mit Photozelle und Elektrometer die gesamte Lichtausstrahlung einer dieser Funkenstrecken soweit es die spektrale Empfindlichkeit der Photozelle zuläßt. Die Strahlung der anderen Funkenstrecken wird dabei abgeschirmt, so daß sie nicht auf die Zelle fallen kann. Weiterhin wird nun eine nach der anderen der nicht zur Lichtmessung dienenden Funkenstrecken metallisch kurz geschlossen, so daß zum Schluß nur noch die zur Lichtmessung benützte Funkenstrecke in Betrieb ist. Dabei findet man, daß die Strahlung dieser Funkenstrecke nur in sehr geringem Maße davon abhängt, ob noch weitere Funkenstrecken gleichzeitig mit im Kreise in Betrieb sind und Energie aufnehmen. Das heißt die Energieaufnahme einer Luftfunkenstrecke ist sehr gering, sie lag bei diesen Versuchen unterhalb 1%. Dies beleuchtet in eindrucksvoller Weise die Tatsache, daß der größte Teil der im

durchgeführt: An die vertikalen Ablenkplatten des Oszillographen wird der über Photozelle und Verstärker kommende Lichtimpuls gegeben. Gleichzeitig wird der Spannungsverlauf des gleichen Funkens an die horizontalen Ablenkplatten gebracht. Aus der so gewonnenen Lichtspannungscharakteristik eines Funkens, wie sie im Oszillogramm 10d gezeigt wird, ergibt sich die zeitliche Zuordnung von Lichtausstrahlung und Spannungsverlauf (Abb. 10e). Man sieht, daß der Beginn der Strahlung mit dem Spannungszusammenbruch zusammenfällt, daß jedoch das Maximum der Ausstrahlung zu einer Zeit erreicht wird, wo die Spannung schon annähernd auf Null abgefallen ist. Das Abklingen der Strahlung erfolgt wesentlich langsamer

als der Anstieg. Gegenüber der Strahlung des eigentlichen Funkens ist diejenige der vorangehenden Gleitentladung vollkommen zu vernachlässigen. Sie ist um



Kondensator vorhandenen potentiellen Energie nicht in Funken sondern im äußeren Entladungskreis verbraucht wird. Zur Erhöhung des Wirkungsgrades ist also erforderlich, Selbstinduktion und OHMSchen

zeigen außer einem Linienspektrum ein intensives Kontinuum, das um so deutlicher gegenüber dem Linienspektrum hervortritt, je höher die Stromdichte der Entladung wird. Eine starke Zunahme des Konti-

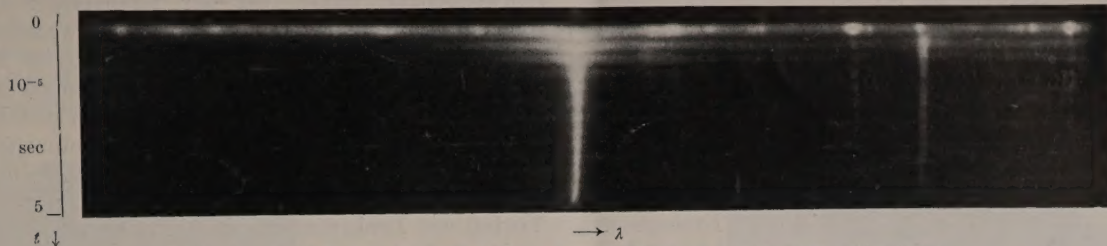


Abb. 13. Zeitlich aufgelöstes Spektrum eines Luftfunken zwischen Magnesiumkugeln.

Widerstand des Kreises weitgehend herabzusetzen. Andererseits gewinnt man eine Zunahme der Strahlung, wenn man eine Möglichkeit findet, bei gleicher Aufladespannung die Schlagweite des Funken zu vergrößern, was bedeutet, daß die Energieverluste zu einem größeren Bruchteil im Funken und nicht im äußeren Kreis erfolgen. Diese Möglichkeit ist gegeben durch die eben erwähnte Serienschaltung von Funkenstrecken, wobei bis zu einer gewissen Grenze die Aufladespannung, die zur Zündung mehrerer in Serie geschalteter Funkenstrecken ausreicht, annähernd die gleiche ist, wie bei einer Strecke allein. Eine noch einfachere Lösung stellt die Gleitfunkenstrecke dar, deren Schlagweite gegenüber einer normalen Luftfunkenstrecke ein Vielfaches sein kann. Daraus erklärt sich auch der bereits früher (Abb. 10b und c) erwähnte bessere Wirkungsgrad von Gleitfunken gegenüber Luftfunken. Es ist natürlich nicht gesagt, daß mit zunehmender Schlagweite bei gleicher Aufladespannung die Strahlung dauernd zunehmen muß. Es sind dabei eine Reihe von entgegengesetzt wirkenden Faktoren zu berücksichtigen. Die Verlängerung des Funkenkanals bringt zwar zunächst eine Vergrößerung der leuchtenden Fläche mit sich, vorausgesetzt, daß die Breite des Kanals gleich bleibt. Andererseits wird jedoch die je Längeneinheit des Kanals umgesetzte Energie mit zunehmender Länge allmählich abnehmen, so daß ein Absinken der Leuchtdichte zu erwarten ist. Diese Verhältnisse illustriert eine Kurve (Abb. 11b), welche die Strahlung eines Gleitfunken in Abhängigkeit von der Schlagweite angibt. Die Strahlung ist dabei aus Oszillogrammen entnommen, und zwar der Spitzenwert der Helligkeit. Man sieht, daß von einer bestimmten Schlagweite ab ( $d = 14$  cm) keine Zunahme der Helligkeit mehr auftritt. In einzelnen Fällen findet man sogar bei großen Schlagweiten eine Abnahme der Strahlung nach Überschreiten eines Maximums.

#### Zeitliche und spektrale Analyse des Funkenlichts.

Spektralaufnahmen von Funken sehr kurzer Dauer und hoher Stromstärke, wie sie hier behandelt wurden,

numms ist außerdem zu erreichen durch eine Einschnürung des Entladungskanals [13]. Benützt man z. B. den Innengleitfunken wie er oben beschrieben wurde (Abb. 1b), so läßt sich durch variablen Innendurchmesser der Glaskapillaren leicht eine entsprechende Einschnürung des Kanals erzielen. Der Einfluß dieser Maßnahme auf das Funkenpektrum ist aus Abb. 12 zu ersehen, wo Gleitfunkenstrecken verschiedener Innendurchmesser (3, 1,6 und 0,6 mm) benützt und mit einem Funken in freier Luft verglichen wurden. Man erkennt deutlich das Hervortreten des Kontinuums mit zunehmender Einschnürung. Das Linienspektrum entspricht weitgehend den Funken- und Bogenlinien des Gases, einzelne Linien eventuell auch Bestandteilen der Glaswände. Dagegen sind Linien der Elektrodenwerkstoffe kaum vorhanden, da der Abstand der Elektroden sehr groß ist und Metaldämpfe erst in sehr viel längeren

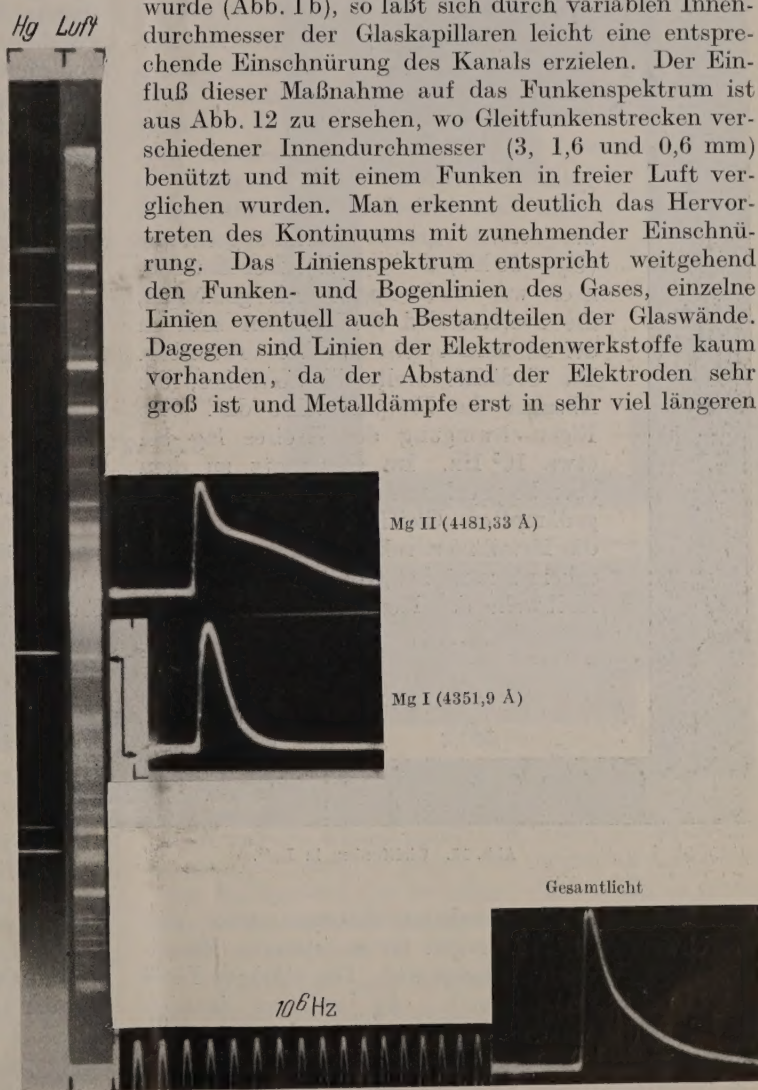
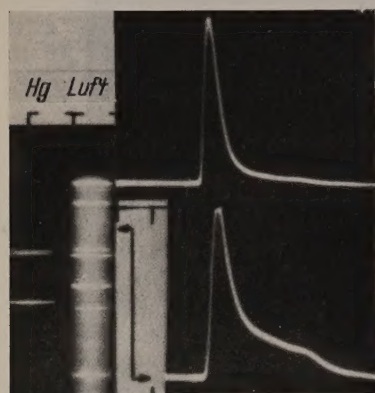


Abb. 14. Funke in freier Luft zwischen Magnesiumkugeln.

Zeiten als sie hier betrachtet werden, in die Entladungsbahn eindringen. Zur Verfolgung des zeitlichen Ablaufs eines Funkenpektrums wurden 2 Wege beschritten. Um einen Überblick über den zeitlichen Verlauf des gesamten Spektrums zu erhalten, wurde die Methode des Drehspiegels benützt. Der Funke wird über einen schnell rotierenden Drehspiegel



auf den Spalt eines Spektrographen abgebildet. Die Bewegung des Funkenbildes erfolgt dabei parallel zur Spaltachse von oben nach unten. Das Funkenbild selbst muß in der Bewegungsrichtung sehr schmal sein, da davon ja teilweise die zeitliche Auflösung abhängt. Die Auslösung des Funkens muß bei derjenigen Lage des rotierenden Spiegels erfolgen, wo das Bild gerade in den Spalt eintritt. Aus Intensitätsgründen mußte



der Spektrographenspalt sehr weit gemacht werden. Außerdem war die Drehspiegelgeschwindigkeit begrenzt, so daß hierbei nur verhältnismäßig langdauernde Funken untersucht werden konnten. Als Beispiel einer solchen Aufnahme diene Abb. 13. Sie zeigt das zeitlich aufgelöste Spektrum eines Funkens in freier Luft zwischen Magnesiumkugeln bei relativ großer Entladungsenergie ( $U_0 = 20$  kV,  $C = 0,5 \mu\text{F}$ ). Der Entladekreis war nicht aperiodisch gedämpft, die auftretenden Oszillationen sind in der Aufnahme sehr deutlich erkennbar. Die Ordinate stellt die Zeitachse, die Abszisse die Frequenzachse dar. Die Eigenschwingung des Kreises lag bei etwa  $10^5$  Hz. Im Gegensatz zu dem eben besprochenen Fall eines aperiodisch gedämpften Gleitfunken treten hier die Metalllinien sehr deutlich auf. Man erkennt zunächst, daß in der ersten Halbwelle das Kontinuum vorherrscht,

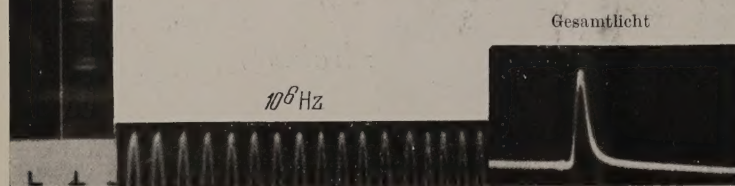


Abb. 15. Gleitfunken in Luft.

jedoch bereits beim nächsten Strommaximum fast verschwunden ist. Dagegen treten einzelne Metalllinien außerordentlich lange auf. Die stärkste Linie (Mg II 4481,33 Å) ist nach  $5 \cdot 10^{-5}$  sec noch deutlich zu sehen (sie wird dort bereits durch den Kassettenrand abgedeckt). Die Oszillationen des Kreises sind im Leuchten dieser Linie abgesehen von den ersten 3 Halbwellen nicht mehr zu erkennen, während bei einigen anderen Linien die Strahlung sehr schnell dem elektrischen Vorgang folgt, so daß die Oszillationen während des ganzen Strahlungsvorganges sichtbar sind.

Zur Untersuchung einzelner Linien oder engbegrenzter Teile des Funkenspektrums ist die Registrierung mit Multiplier und Oszillograph einfacher als die Drehspiegelmethode. Der Multiplier ist dabei am

Ausgangsspalt eines Spektralapparats bzw. eines Monochromators angebracht. Beim Vergleich der beiden Methoden ist hauptsächlich folgendes zu beachten. Bei der quantitativen Auswertung der erhaltenen Schwärzungen treten bei der Drehspiegelmethode folgende Schwierigkeiten auf: Der SCHWARZSCHILD-Exponent muß für die hier benutzten extrem kurzen Zeiten bestimmt werden. Die Schwärzungsmarken müssen möglichst mit dem Funkenlicht selbst gleichzeitig auf die Platte gebracht werden. Die Intensität der Strahlung liegt häufig an der äußersten Grenze der Empfindlichkeit der photographischen Platte. Der Vorteil der Drehspiegelmethode ist dagegen die Tatsache, daß man mit einer Aufnahme bereits den Verlauf des gesamten Spektrums erhält. Mit Photozellen bzw. Multiplier sind dagegen immer nur einzelne Teile des Spektrums zu erfassen. Die hohe Empfindlichkeit eines Multipliers reicht dagegen auch für sehr viel geringere Strahlungsintensitäten aus als bei der photographischen Platte. Dagegen bringt die Anwendung von Multiplier, Verstärker und Oszillograph folgende Schwierigkeiten: Infolge der sehr kurzen Dauer der Funkenstrahlung muß die obere Frequenzgrenze der benutzten Apparatur sehr hoch liegen. Dies ist bei Verstärker nicht immer leicht zu erreichen, da es sich um Frequenzen bis zu 10 MHz handeln kann, wobei die Ausgangsspannung des Verstärkers 100 V und mehr betragen muß. Diese hohe Ausgangsspannung ist andererseits nötig, um genügend große Ausschläge am Hochleistungsoszillographen zu erhalten, dessen Empfindlichkeit relativ gering ist.

#### Strahlungsmessungen mit Multiplier und Oszillograph.

Zunächst wurde mit dem Multiplier zum Vergleich mit der obigen Drehspiegelaufnahme (Abb. 13) ein Luftfunken zwischen Magnesiumelektroden untersucht. Die Spannung betrug  $U = 20$  kV,  $C = 0,01 \mu\text{F}$ . Abb. 14 zeigt von links nach rechts zuerst auf ruhender photographischer Platte aufgenommenes Spektrum des Luftfunken zwischen Magnesiumkugeln. Im Anschluß an das ruhende Spektrum sind die mit dem Multiplier gewonnenen Oszillogramme des Strahlungsverlaufs so angebracht, daß jeweils die Null-Linie des Oszillogramms an den betreffenden Teil des Spektrums anschließt, aus dem heraus es genommen wurde (teilweise stellt eine eingezeichnete

Verbindungsline die Verbindung zwischen Spektrum und Null-Linie des Oszillogramms her).

Die Oszillogramme geben also den Strahlungsverlauf der Linie oder eines Teils des Kontinuums wieder, soweit sie aus dem Gesamtspektrum durch den Ausgangsspalt des Spektrographen ausgeblendet worden waren und auf den Multiplier fielen. Die Abszisse stellt die Zeitachse dar, deren Maßstab aus der unten beigefügten, für alle Oszillogramme der Abbildung gültigen Meßfrequenz von  $10^6$  Hz zu ersehen ist. Die Ordinate der Oszillogramme gibt die jeweilige Helligkeit an. Da diese für die einzelnen Teile des Spektrums um Größenordnungen verschieden ist, wurde durch Änderung des Verstärkungsgrads auf ungefähr gleiche Amplitude eingestellt. Die Helligkeitswerte verschiedener Oszillogramme können also nicht



miteinander verglichen werden. Rechts unten enthält Abb. 14 den spektral unzerlegten Strahlungsverlauf. Man erkennt, daß die Linie Mg II (4481,33 Å) ein sehr langes Nachleuchten zeigt, während z. B. Mg I (4351,9 Å) ein erkennbares Nachleuchten aufweist. Vergleicht man mit der Drehspiegelaufnahme (Abb. 13), so ist es wahrscheinlich, daß das Oszillogramm an der Stelle der Linie Mg II durch Überlagerung der Strahlung des Kontinuums und der aus dem Kontinuum heraus ent-

sind die Ergebnisse ganz ähnlich. An der gleichen Stelle wie beim Gleitfunken in Luft (Abb. 15) befindet sich eine nachleuchtende Linie, während die übrigen untersuchten Linien ebenso wie das Kontinuum keine besonderen Nachleuchterscheinungen zeigen. Dies steht in einem gewissen Widerspruch zu Messungen von CRAGGS und MEEK [4], die bei Argon ein langes Nachleuchten des unzerlegten Lichtes fanden. Die obigen Messungen wurden deshalb mit sehr viel

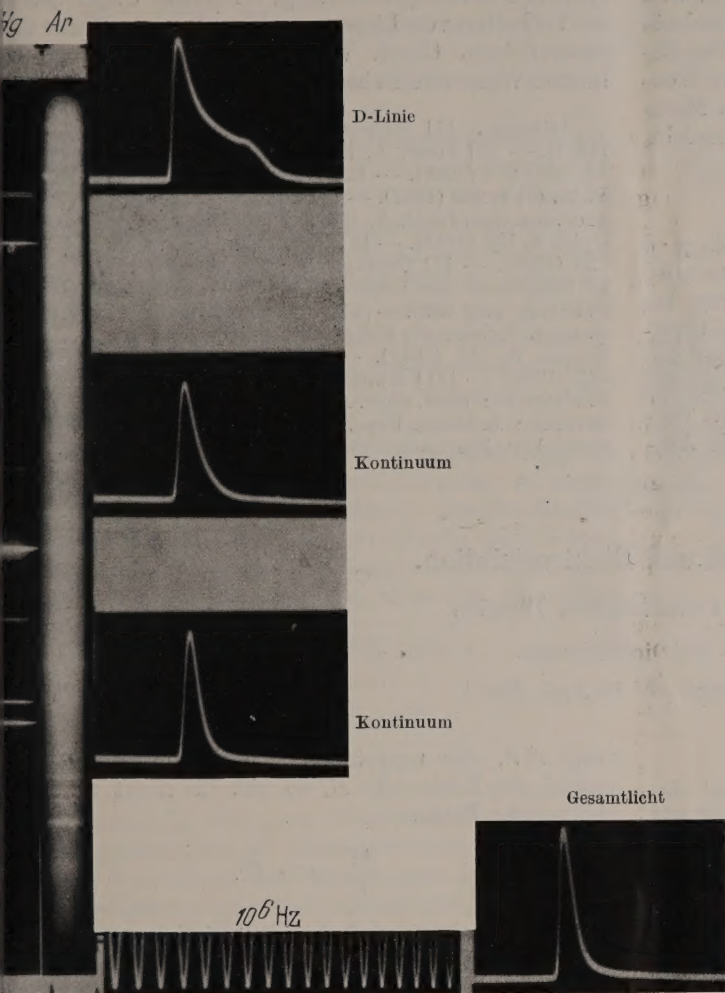


Abb. 16. Gleitfunken in Argon.

standenen Linie zustande kommt. Die erste Spitze ist also dem Kontinuum zuzuordnen. Das Oszillogramm des Gesamtlichts (rechts unten) zeigt außer der anfänglichen hohen Spitze ein relativ intensives und langanhaltendes Nachleuchten, woraus sich abschätzen läßt, daß der Anteil der nachleuchtenden Linienemission groß ist, verglichen mit dem kurzzeitig leuchtenden Kontinuum.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse beim Spektrum eines Innengleitfunken in Luft (Abb. 15). Das Aufnahmeverfahren ist das gleiche wie vorher. Es wurde eine Reihe von Linien untersucht, jedoch nur bei einer einzigen zeigte sich ein Nachleuchten ähnlich wie beim Magnesium.

Diese Linie dürfte Bestandteilen der Glaswand des Entladungsgefäßes zuzuschreiben sein. Auch das Gesamtlicht (rechts unten) zeigt kein erkennbares Nachleuchten. Im Fall eines Gleitfunken in Argon (Abb. 16)

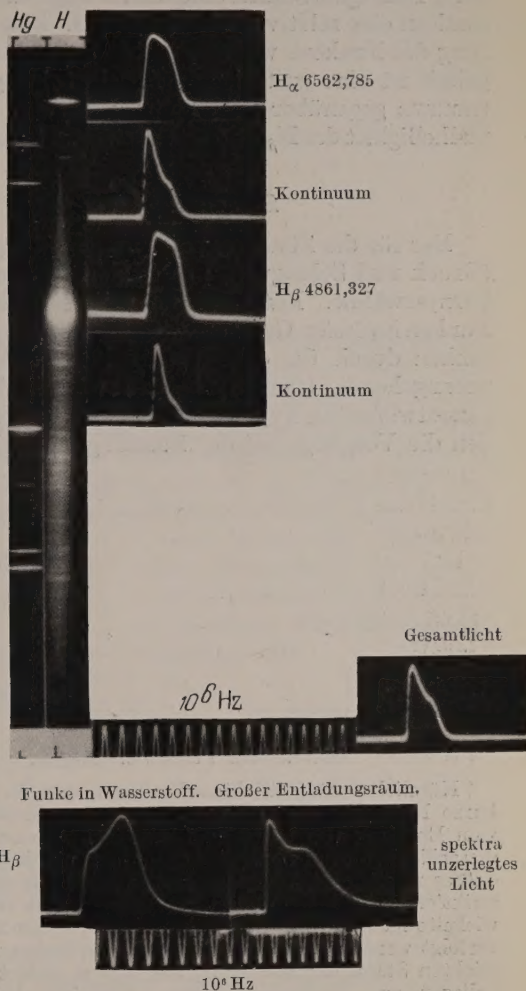


Abb. 17. Gleitfunken in Wasserstoff.

größerer Verstärkung wiederholt, wobei sich ein relativ langes Nachleuchten zeigte, das jedoch im Verhältnis zum Spitzenwert der Strahlung am Anfang so gering war, daß es auf den Oszillogrammen der Abb. 16 nicht mehr zu erkennen ist.

Vollkommen neue Erscheinungen zeigen sich bei der Strahlung eines Innengleitfunken in Wasserstoff (Abb. 17). Der Strahlungsverlauf der beiden untersuchten Wasserstofflinien  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  ist beinahe rechteckig, die Zeit der Ausstrahlung ist etwa 2–3  $\mu\text{sec}$ , während die Entladung des Kondensators nach gleichzeitigen Aufnahmen des Stromverlaufs aperiodisch erfolgt und in weniger als 1  $\mu\text{sec}$  beendet ist. Das Kontinuum ist wesentlich schwächer als in allen seitherigen Fällen. Oszillogramme der Strahlung an Stelle des Kontinuums zeigen eine kurze steile Lichtspitze, außerdem aber auch schwach eine zweite nachleuchtende Komponente, die wahrscheinlich einer an dieser



Stelle liegenden schwachen Linie zuzuordnen ist. Das Oszillogramm des Gesamtlichts zeigt außer der dem Kontinuum entsprechenden ersten Lichtspitze ein beträchtliches Nachleuchten, verursacht durch Linienemission. Der untere Teil von Abb. 17 läßt erkennen, wie stark die Ergebnisse von den Entladungsbedingungen abhängen. Es ist dort die Strahlung der  $H_\beta$  und das spektral unzerlegte Licht als Oszillogramm aufgenommen. Als Entladungsgefäß diente nicht wie beim Innengleitfunken eine relativ enge Glaskapillare, sondern eine relativ große Glaskugel. Eine Einschnürung des Funkens war also nicht vorhanden. Das Ergebnis ist eine weitgehende Abschwächung des Kontinuums gegenüber dem Linienspektrum. Die Maximalhelligkeit der  $H_\beta$  wird erst nach etwa 3  $\mu$ sec erreicht.

### Zusammenfassung.

Der für die Zündung von Funken bei großen  $p \cdot d$  (Druck mal Schlagweite) geltende Kanalaufbau wird kurz erwähnt. Entsprechend dem Kanalaufbau bei Funken im freien Gasraum wird die Zündung bei Gleitfunken durch die dem eigentlichen Funkenstadium vorangehende Gleitentladung bewirkt. An einigen neuentwickelten Typen von Gleitfunkenstrecken werden die Vorgänge bei der Zündung, speziell die Aus-

breitungsgeschwindigkeit der Gleitentladung in verschiedenen Gasen in Abhängigkeit von Druck und Spannung gemessen. Die im Anschluß an die Zündung einsetzende stromstarke Kondensatorenladung ist die Ursache einer äußerst intensiven Lichtstrahlung, deren zeitlicher Verlauf mit Photozelle und Oszillograph untersucht wird. Es zeigt sich, daß der optische Wirkungsgrad einer Gleitfunkenstrecke besser ist, als der einer normalen Luftfunkenstrecke. Eine zeitliche Analyse der Funkspektren zeigt erhebliche Unterschiede im Verhalten von Linien und Kontinuum. Unter den untersuchten Gasen Wasserstoff, Luft und Argon nimmt Wasserstoff eine Sonderstellung ein.

**Literatur.** [1] RAETHER, H.: Z. Phys. **117**, 375, 524 (1941). — [2] LOEB, L. B. u. I. M. MEEK: J. appl. Physics **11**, 438, 459 (1940). — [3] WEIZEL, W. u. R. ROMPE: Ann. Phys. (6) **1**, 285 (1947). — [4] CRAGGS, I. D. and I. M. MEEK: Proc. roy. Soc. Lond. A. **186**, 241 (1946). — [5] FRÜNGEL, F.: Optik **3**, 128 (1948). — [6] VASTMANN, I.: Z. techn. Phys. **21**, 223 (1940). — [7] TOEPLER, M.: Zus. Artikel v. G. MIERDEL in Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XIII, Teil 3, S. 282. Leipzig 1929. — [8] MERRILL, F. H. and A. v. HIPPEL: J. appl. Physics **10**, 873 (1939). — [9] KATZ, H.: Jb. AEG-Forsch. **8**, 155 (1941). — [10] GREINER, E.: Z. Phys. **81**, 543 (1933). — [11] HUBER, P., F. ALDER, E. BALDINGER u. F. METZGER: Helv. phys. Acta **19**, 207 (1946). — [12] WALLRAFF, A.: Z. techn. Phys. **17**, 44 (1936). — [13] FINKELNBURG, W.: Kontinuierliche Spektren, S. 300. Berlin 1938.

## Ultraschall und Elektrostriktion.

Von H. FALKENHAGEN, Dresden.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 10. April 1948.)

### Einleitende Vorbemerkungen.

Kürzlich veröffentlichten Verfasser und R. MEES<sup>1</sup> eine kurze Notiz über ein neues Verfahren zur Erzeugung und zum Empfang von Ultraschall mittels Elektrostriktion. In dieser Notiz, die nur wenige Zeilen umfaßt, wurde nur erwähnt, daß es möglich sei, Ultraschallwellen mit Hilfe von Elektrostriktion zu erzeugen und zu empfangen. Die von uns entwickelte Methode konnte aus äußeren Gründen nicht weiter verfolgt werden. Ich möchte jedoch den bisher von uns erreichten Stand der Forschung auf diesem Gebiet den Fachkollegen zur Verfügung stellen. Vielleicht besteht doch irgendwo die Möglichkeit, diesen Fragenkomplex wieder aufzugreifen und weiter zu entwickeln. Ich wurde von verschiedenen Seiten gebeten, eine ausführlichere Veröffentlichung zu geben, was ich hiermit tue. Leider sind alle Unterlagen unserer Arbeit durch die Zeitverhältnisse verloren gegangen, und ich bin daher ganz auf mein Gedächtnis angewiesen.

### § 1. Bemerkungen über den elektrostriktiven Effekt.

Der elektrostriktive Effekt, der auf einer Volumenänderung als Folge eines elektrischen Feldes beruht, ist eine Folge der Polarisierbarkeit der Moleküle. Durch die innermolekulare Polarisierung der Moleküle ändern sich viele Eigenschaften der Materie, z. B. das Volumen, die anziehenden und abstoßenden Kräfte auf die Umgebung. Auch durch die Orientierungspolarisation der Moleküle wird der Ordnungszustand geändert und hiermit kann eine Volumenänderung verbunden sein. Nennen wir die Volumenände-

rung  $\Delta V$ , das ursprüngliche Volumen  $V$  und die elektrische Feldstärke  $E$ , so gilt für nicht zu hohe elektrische Feldstärken

$$\frac{\Delta V}{V} = 2aE^2. \quad (1)$$

$a$  heißt die elektrostriktive Materialkonstante. Bei höheren Feldstärken wird eine mögliche Sättigung der Orientierungspolarisation beobachtet, und der Verlauf von  $\Delta V/V$  nimmt den in der Abb. 1 gestrichelt hervorgehobenen Verlauf.

Überlagert man einem statischen Feld  $E_0$  ein Wechselfeld, so zeigt die elektrische Feldstärke  $E$  folgenden zeitlichen Verlauf:

$$E = E_0 + E_1 \sin \omega t. \quad (2)$$

Hierin ist  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit. Die relative Volumenänderung wird damit

$$\frac{\Delta V}{V} = 2a(E_0^2 + 2E_0E_1 \sin \omega t + E_1^2 \sin^2 \omega t). \quad (3)$$

Nun ist

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Folglich wird

$$\frac{\Delta V}{V} = a(2E_0^2 + E_1^2) + 4aE_0E_1 \sin \omega t + \left. \begin{aligned} &+ aE_1^2 \sin(2\omega t - \pi/2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

<sup>1</sup> FALKENHAGEN, H. u. R. MEES: Reichsber. Physik **1944**, H. 1, 46.



Setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_0 &= a(2E_0^2 + E_1^2) \\ \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_1 &= 4aE_0E_1 \\ \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_2 &= aE_1^2, \text{ weiter } \varphi_1 = 0, \varphi_2 = -\pi/2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

so wird die elektrostriktive relative Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_0 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_2 \sin(2\omega t + \varphi_2). \quad (6)$$

Enthält also die elektrische Feldstärke keinen statischen Anteil, ist damit  $E_0 = 0$ , so verschwindet in  $\Delta V/V$  nach (4) u. (5) der Anteil mit  $\sin \omega t$  und es tritt nur der Term mit der doppelten Frequenz  $2\omega$  auf. Ist jedoch der statische Anteil des Feldes vorhanden, also  $E_0 \neq 0$ , so enthält  $\Delta V/V$  außer der doppelten Frequenz auch eine solche der gleichen Frequenz, d. h. ein linearer Effekt tritt in Erscheinung, während ohne statisches Feld nur ein quadratischer Effekt existiert. Die Folge der elektrostriktiven Volumenänderungen sind entsprechende Druckänderungen, die sich aus der Zustandsgleichung ergeben. Kennt man die Zustandsgleichung, so kennt man die den Volumänderungen entsprechenden Druckänderungen. Die der Grundwelle und ersten Oberwelle entsprechenden Schallwechseldruckamplituden  $P_\omega(x, y, z)$  bzw.  $P_{2\omega}(x, y, z)$  werden demnach:

$$P_\omega(x, y, z) = \frac{4a}{\beta} f_\omega U_0 U_1$$

bzw.

$$P_{2\omega}(x, y, z) = \frac{a}{\beta} f_{2\omega} U_1^2,$$

wenn

$$U_0 + U_1 \sin \omega t$$

die angelegte Hochfrequenzklemmenspannung und  $\beta$  die Kompressibilität der Flüssigkeit bedeuten.  $f_\omega$  und  $f_{2\omega}$  sind Funktionen der Schallfrequenz, der Schallgeschwindigkeit, der Schallwiderstände, der Schallabsorption aller Stoffe und der geometrischen Anordnung. Es wäre interessant, diese Gedanken experimentell und theoretisch ausführlich zu untersuchen.  $f_\omega$  und  $f_{2\omega}$  sind Ortsfunktionen. Sind  $f_\omega$  bzw.  $f_{2\omega}$  berechnet, so kann man  $a$  bestimmen. Man kann aber die elektrostriktive Konstante  $a$  auch direkt statisch messen. Beim linearen elektrostriktiven Effekt sorgt die konstante Feldstärke  $E_0$  für eine teilweise Ausrichtung der Moleküle. Die Wechselfeldstärke  $E_1 \sin \omega t$  moduliert diese Ausrichtung mit gleicher Frequenz, so daß mechanische Schwingungen entstehen. Bei den piezoelektrischen Kristallen sind die Moleküle im Kristallgitter an sich schon gerichtet. Eine in der richtigen Richtung wirkende Feldstärke gibt sofort mechanische Schwingungen. Der piezoelektrische Effekt ist also ein Spezialfall der Elektrostriktion.

## § 2. Der elektrostriktive Ultraschallgeber.

Um nun ein elektrisches Feld in der Flüssigkeit zu erzeugen, kann man verschiedene Ultraschallgeber benutzen. Von den zahlreichen von uns verwandten elektrostriktiven Ultraschallgebern erwähnen wir zunächst den Glasreflektor (s. Abb. 2). Hier wird die

elektrostriktive Zone durch die auf der Glasplatte  $g$  aufgespannten Drähte erzeugt. Die elektrische Spannung liegt zwischen  $P$  und  $Q$  der Abb. 2. Wesentlich ist, daß der 4. Teil der Wellenlänge des elektrischen Wechselfelds etwa dem Abstand  $d$  zweier benachbarter Drähte entspricht.

Man kann auch einen Metallreflektor benutzen, bei dem parallele Drähte in gleichem Abstand gegenüber einer z. B. kreisrunden Metallplatte aufgespannt

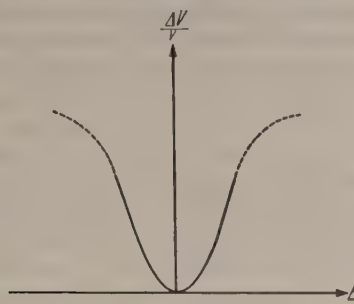


Abb. 1.

sind, wobei eine Wechselspannung zwischen der Metallplatte und den Drähten erzeugt wird. Sehr praktisch und für die Abstrahlung günstiger als diese Anordnungen ist die Anordnung der Abb. 3. Hier befindet sich die elektrostriktive Zone zwischen beiden Metallplatten  $p$  und  $q$ . In diesem Falle ist die Wellenlänge der elektrischen Wechselspannung  $\lambda$  etwa gleich dem Doppelten des Abstandes  $d$  der beiden Metallplatten, an welche die elektrische Wechselspannung angelegt ist.

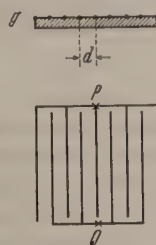


Abb. 2.



Abb. 3.

## § 3. Die benutzte experimentelle Anordnung zur Erzeugung von Ultraschallwellen mittels Elektrostriktion.

Wir beschreiben jetzt die von uns verwandte Methode zur Erzeugung von Ultraschallwellen mittels Elektrostriktion (vgl. Abb. 4). Eine mit einem Pfeifton modulierte Hochfrequenzspannung wird in einem Abstimmkreis, für dessen Frequenz die Selbstinduktion  $L$  und die Kapazität  $C$  maßgebend sind, induziert.

Diese Hochfrequenzspannung liegt an dem elektrostriktiven Ultraschallgeber  $USG$  und einem Röhrenvoltmeter  $RV$ . Zwischen dem elektrostriktiven Ultraschallgeber  $USG$  und einem genau parallel gerichteten gegenübergestellten piezoelektrischen Ultraschallempfänger  $USE$  befindet sich die elektrostriktive Flüssigkeit, die sich auch in dem Schallgeber befindet. In dieser Flüssigkeit entstehen zwischen Schallgeber und Schallempfänger stehende Ultraschallwellen. In Abhängigkeit von  $D$  wird nun Resonanz oder keine Resonanz auftreten, d. h. es wird weniger elektrische Energie in Schallenergie umgewandelt oder mehr. Der Schallempfänger wird damit bei Änderung des Abstandes  $D$  mehr oder weniger Schallenergie aufnehmen, was in einem Lautsprecher als Lautstärkeschwankung hörbar ist. Ändert man  $D$  um die halbe Ultraschallwellenlänge, so resultiert



wieder die gleiche Lautstärke, die also eine periodische Funktion von der halben Ultraschallwellenlänge ist. Beispielsweise betrug die Zahl der Schwingungen im Empfänger 5 MHz. Das entspricht einer Ultraschallwellenlänge von etwa 0,12 mm in Xylol. Es wurde beobachtet, daß besonders die Grundwelle trotz sorgfältiger Abschirmung des Senders übergreift. Nicht so störend ist dies bei der ersten Oberwelle. Hier ist die direkte elektrische Kopplung weniger störend. Deshalb wurde der quadratische Effekt zuerst nachgewiesen und erst später der lineare Effekt. Als Flüssigkeiten wurden gewählt m-Xylol, o-Xylol und Toluol, die sehr gute elektrostriktive Effekte lieferten.

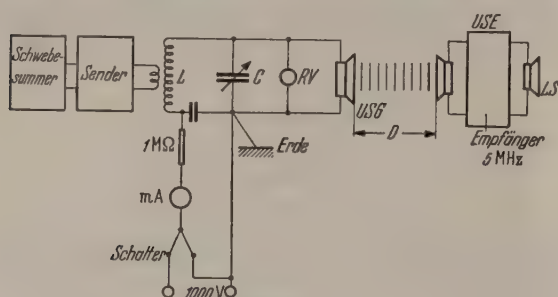


Abb. 4.

Mäßiger war der Effekt bei Benzol, und Tetrachlorkohlenstoff zeigte wohl zufolge der großen Symmetrie des Tetrachlorkohlenstoffmoleküls keinen nennenswerten Effekt.

Auch der Verlustwiderstand des Ultraschallgebers konnte ermittelt werden.

#### Schlußbemerkungen und Zusammenfassung.

Bisher sind in der Technik Verfahren bekannt geworden, die es ermöglichen, Ultraschall auf mechanischem, thermischem, magnetostruktiven sowie piezoelektrischem Wege herzustellen bzw. zu empfangen. Diese bekannten Methoden haben folgende Nachteile: Das Frequenzgebiet, in dem mit wirtschaftlichem Nutzeffekt gearbeitet werden kann, ist nur beschränkt. Nach der Literatur werden als höchste Frequenzen, die sich noch mit einiger Intensität auf magnetostruktivem Wege erzeugen und empfangen lassen, etwa 60 kHz angegeben. Mit piezoelektrischen Kristallen lassen sich die Frequenzen wesentlich erhöhen, mit etwa 50 000 kHz ist jedoch auch hier wegen der Zerbrechlichkeit der Schwingkristalle eine für die technische Anwendbarkeit obere Grenze gesetzt. Die Frequenz kann nur in beschränktem Umfang verändert werden. Auch sind die piezo-

elektrischen Schwingkristalle teuer und schwierig herzustellen und besitzen im allgemeinen ungleichmäßige Abstrahlung. Die magnetostruktiven Sender und Empfänger können nur unter Verwendung schwer beschaffbarer Nickel-Chrom-Stahllegierungen hergestellt werden. Demgegenüber treten diese Nachteile bei Ultraschall mittels Elektrostriktion von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern nicht auf. Es ist mit der elektrostriktiven Methode möglich, Ultraschallwellen mit einer Frequenz bis zu 5 000 000 kHz und höher ohne Oberschwingungen zu erzeugen und zu empfangen. Die Frequenz kann bei festen Stoffen, Flüssigkeiten und Gasen kontinuierlich in weitem Umfang variiert werden. Es erfolgt die Abstrahlung durch den Ultraschallgeber über die gesamte strahlende Fläche vollkommen gleichmäßig. Bei gasförmigen Elektrostriktionssendern bzw. Elektrostriktionsempfängern ist die Energieübertragung sehr günstig, da hier das schallgebende bzw. schallempfangende Medium selbst Gas ist. Zum Bau von elektrostriktiven Sendern und Empfängern werden nur billige Rohstoffe verwendet.

Zur Herstellung von Ultraschall auf elektrostriktivem Wege haben sich folgende Methoden, die beliebig miteinander kombiniert werden können, als brauchbar erwiesen:

1. Das elektrische Wechselfeld wird auf geeignete Weise an den Ultraschallgeber angelegt.
2. Die Moleküle des Ultraschallgebers werden zuerst durch eine elektrische Vorspannung gerichtet und polarisiert oder auf magnetischem Wege beeinflusst, und es wird zugleich an das gerichtete Medium eine elektrische Wechselspannung angelegt.
3. Der Ultraschallgeber aus festen Stoffen erhält durch geeignete mechanische, elektrische, magnetische bzw. Wärmebehandlung eine permanent gerichtete Struktur, worauf das elektrische Wechselfeld beliebig angelegt werden kann.
4. Die Moleküle des Ultraschallempfängers werden durch ein elektrisches bzw. magnetisches Feld gerichtet und polarisiert. Das so gerichtete Medium wird beschallt, und es wird auf geeignete Weise eine hierdurch entstehende elektrische Wechselspannung abgenommen.
5. Der Ultraschallempfänger aus festen Stoffen erhält durch geeignete mechanische, elektrische, magnetische bzw. Wärmeverbehandlung eine permanent gerichtete Struktur. Das Medium wird beschallt und es wird auf geeignete Weise eine hierdurch entstehende elektrische Wechselspannung abgenommen.

## Die Ähnlichkeits- und Modellgesetze bei spannungsoptischen Versuchen.

Von E. MÖNCH, München.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 13. August 1948.)

### I. Die gegenwärtigen Möglichkeiten und Voraussetzungen bei den spannungsoptischen Modellversuchen.

Die Spannungsoptik dient bekanntlich [1], [2], [3], [4], [5], zur quantitativen Erfassung von Spannungszuständen, vornehmlich in Konstruktionen der Technik, durch Versuche an Modellen aus durchsichtigen Stoffen auf Grund der Spannungsdoppelbrechung. Als Modellmaterial verwendet man heute

neben Zelluloid meist Phenol-Formaldehyd-Edelkunstharz, weil sich mit diesem Werkstoff der höchste bisher bekannte optische Effekt erzielen läßt. Es werden zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren angewandt.

In der ebenen Spannungsoptik wird ein ebenes Kunstharzmodell von überall gleicher Dicke bei Raumtemperatur einem ebenen Spannungszustand



unterworfen und zwischen gekreuzten Polarisationsfiltern beobachtet bzw. photographiert. Aus den dabei infolge der Spannungsdoppelbrechung auftretenden Interferenzerscheinungen kann der Spannungszustand im Modell ermittelt werden.

Das *Erstarrungsverfahren der räumlichen Spannungsoptik* nach OPPEL [6] und HILTSCHER [7] wird ermöglicht durch eine besondere Eigenschaft der Phenolkunstharze. Das räumliche Modell wird hierbei bei etwa 80° C durch äußere Kräfte verformt und hierauf unter Beibehaltung der Verformung langsam abgekühlt. Nach Beendigung der Abkühlung bleibt dann der Verformungszustand und mit ihm der optische Effekt erhalten, auch wenn jetzt die Lasten weggenommen werden, und das Modell kann in dünne Scheiben zerschnitten werden, die dann, zwischen gekreuzten Polarisatoren untersucht, über den jetzt anzusagen „erstarrten“ Spannungszustand Aufschluß geben.

Ist der Spannungszustand ermittelt, so muß er vom Modell (in folgendem kurz M genannt), das gewöhnlich in verkleinerndem Maßstab ausgeführt ist, mit Hilfe der Gesetze der Ähnlichkeitsmechanik auf die Hauptausführung (in folgendem mit H bezeichnet) übertragen werden. Hierbei wollen wir immer, wie dies ja auch bei der theoretischen Spannungsermittlung geschieht, sowohl bei H wie bei M, das HOOKEsche Elastizitätsgesetz als streng gültig voraussetzen. Das heißt der Spannungszustand soll als nur von 2 Materialkonstanten, dem YOUNGschen Elastizitätsmodul  $E$  und der POISSONSchen Querdehnungszahl  $m$  abhängig angesehen werden. Abweichungen von der Linearität von Spannung und Dehnung und Zeiteinflüsse werden nicht berücksichtigt.

Nach den Arbeiten des Verfassers [8], [9], [10] kann bei sachgemäßer Materialbehandlung für beide spannungsoptische Verfahren das Elastizitätsgesetz als praktisch erfüllt gelten. In der ebenen Spannungsoptik kann man durch starkes Härten der Phenolharzmodelle vollkommene Linearität der Lastdehnungskurve erreichen und Zeiteinflüsse durch Kriechen praktisch ausschalten. Beim Erstarrungsverfahren allerdings muß man starke Kriecherscheinungen in Kauf nehmen. Es wurde jedoch nachgewiesen [9], daß auch bei den räumlichen Versuchen trotz des Kriechens der Spannungszustand als „elastisch“ im Sinne des HOOKEschen Gesetzes angesehen werden darf, da das Kriechen in allen Teilen des Modells proportional zu den Spannungen erfolgt. Daher bleibt, wenn nur alle Lasten während der ganzen Belastungszeit konstant gehalten werden, auch der Spannungszustand während der ganzen Belastungszeit derselbe und nur die Formänderungen werden langsam größer, jedoch in allen Teilen gleichmäßig. Man kann auch die Formänderungen konstant halten, dann nehmen die Spannungen und die äußeren Lasten gleichmäßig ab. Dieses „Verfahren konstanter Formänderung“ muß angewandt werden, wenn bei dem gegebenen Problem bestimmte Formänderungsgrößen, z. B. Durchsenkungen, vorgegeben sind. In beiden Fällen definiert man dann als Elastizitätsmodul das Verhältnis der bei Beginn des Versuchs vorhandenen Spannung zu der am Ende des Versuchs vorhandenen Dehnung. Diese Verhältniszahl bestimmt man durch einen unter gleichen

Versuchsbedingungen durchzuführenden Eichversuch und kann mit ihr dann genau so rechnen wie mit dem Elastizitätsmodul bei strenger Elastizität.

Besondere Beachtung muß den bei spannungsoptischen Versuchen anzuwendenden bezogenen Formänderungen geschenkt werden, da sie bei dem bisher zur Verfügung stehenden Modellmaterial immer noch verhältnismäßig groß gewählt werden müssen, wenn auch in dieser Hinsicht schon bedeutende Verbesserungen erzielt wurden [9]. Während die Dehnung in den Konstruktionen der Technik meist den Wert  $\frac{1}{1000}$  kaum übersteigt, soll im Interesse der Auswertegenauigkeit die maximale Dehnung in der ebenen Spannungsoptik mindestens  $\frac{1}{250}$ , in der räumlichen Spannungsoptik bis zu  $\frac{1}{50}$  betragen. Es wird daher in unseren folgenden Untersuchungen eine der wichtigsten Fragen sein zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen so große Formänderungen vom Standpunkt der Ähnlichkeitsmechanik aus zugelassen werden können.

## II. Grundbegriffe der Ähnlichkeitsmechanik, insbesondere für statisch-elastische Probleme.

Wir schließen uns in der Darstellung der Ähnlichkeitsmechanik und ihrer Bezeichnungsweise an die grundlegenden Arbeiten von M. WEBER und Mitarbeitern [11], [12], [13], [14] an.

### 1. Dimensionslose Darstellung durch Kenngrößen.

Jedes physikalische Problem ist zunächst definiert durch eine mathematische Beziehung zwischen einer Anzahl von dimensionsbehafteten sog. Maßgrößen. Wenn wir das Problem der statischen Beanspruchung eines elastischen Körpers, wie es in der Spannungsoptik gewöhnlich auftritt, in möglichst allgemeiner Form fassen, können wir diese „Maßgrößenbeziehung“ schreiben:

$$F(\sigma, l, l_1, l_2, \dots, P, P_1, \dots, \xi_1, \xi_2, \dots, E, m) = 0. \quad (1)$$

Die abhängige Variable hierin ist die gesuchte Spannung  $\sigma$  an irgendeiner Stelle, während die unabhängigen Variablen im einzelnen bedeuten:  $l, l_1, l_2, \dots$  irgendwelche Längenabmessungen, die geeignet und ausreichend sind, die Gestalt des elastischen Körpers und die Lage der Kräfte, sowie den Ort und die Richtung der gesuchten Spannung  $\sigma$  eindeutig festzulegen,  $P, P_1, P_2, \dots$  die gegebenen äußeren Kräfte,  $\xi_1, \xi_2, \dots$  etwa vorgegebene Verschiebungen einzelner Punkte des Körpers,  $E$  und  $m$  seine elastischen Konstanten, nämlich Elastizitätsmodul und Poissonsche Zahl.

Ob die Funktion  $F$  bekannt ist, ist für unsere Betrachtungen zunächst gleichgültig.

Als Beispiel eines solchen Problems denke man sich etwa einen statisch unbestimmt gelagerten Brückenträger (Abb. 1), bei dem der Einfluß einer Senkung der überzähligen Auflager auf den Spannungszustand dadurch ermittelt werden soll, daß beim Modellversuch an diesen Auflagerstellen Zwischenräume vorgesehen werden. Diese Zwischenräume sind unsere vorgegebenen Formänderungsgrößen  $\xi_1, \xi_2, \dots$ .

Die Lehre von der dimensionslosen Darstellung sagt nun aus, daß man die Anzahl der Variablen des Problems immer um die Anzahl der auftretenden physikalischen Grundgrößen verringern kann, indem



man die Variablen dimensionsfrei macht, d. h. indem man geeignete Variable — in der Zahl der Grundgrößen — auswählt und diese mit den übrigen durch Multiplikation, Division oder Potenzieren zu dimensionslosen sog. Kenngrößen zusammenfaßt. Von den fünf physikalischen Grundgrößen Länge, Kraft, Zeit, Temperatur und Elektrizitätsmenge treten in unserem Problem die beiden ersten auf. Demnach können wir die Variablen um zwei verringern. Machen wir z. B. mit  $l$  und  $E$  dimensionsfrei, so geht die Maßgrößenbezeichnung (1) über in die „Kenngrößenbeziehung“:

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{E}, \frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}, \dots, \frac{P}{El^2}, \frac{P_1}{El^2}, \dots, \frac{\xi_1}{l}, \frac{\xi_2}{l}, \dots, m\right) = 0. \quad (2)$$

Sie ist im Gegensatz zu (1) jetzt nur mehr eine gesetzmäßige Beziehung zwischen reinen Zahlen.

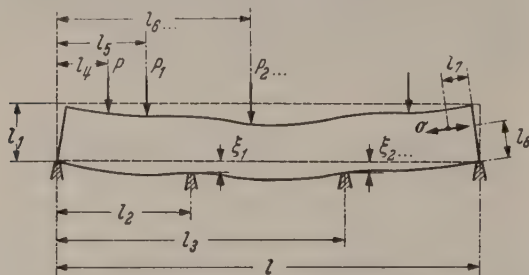


Abb. 1. Beispiel eines statisch-elastischen Problems mit vorgegebenen Verschiebungsgrößen (schematisch).

Die immer bestehende Möglichkeit der Vereinfachung durch Dimensionsbefreiung ist bekanntlich [12] darin begründet, daß die mathematische Formulierung eines physikalischen Vorgangs sich immer aus Elementen zusammensetzt, die Potenzprodukte aus den Grundgrößen (hier Länge und Kraft), den Ableitgrößen (hier z. B. Spannung) und den Stoffkonstanten (hier die Elastizitätskonstanten) sind.

Ist der funktionale Zusammenhang  $F$  bzw.  $\Phi$  vollkommen bekannt, so besteht der Wert der Dimensionsbefreiung in der dadurch zu gewinnenden übersichtlicheren Darstellung. Ist er unbekannt und soll er durch Versuche ermittelt werden, dann bedeutet die dimensionslose Darstellung eine Verringerung der Versuche, die auszuführen sind, um das Gesamtproblem zu klären. Die Versuche sind dann so durchzuführen, daß jeweils 2 Kenngrößen als veränderlich angesehen und die übrigen konstant gehalten werden. Der experimentell zu bestimmende Zusammenhang zwischen den beiden veränderlichen Kenngrößen heißt Kennfunktion oder Kennlinie. Da in dimensionsloser Darstellung die Zahl der Variablen um die Anzahl der Grundgrößen und damit die bestehende Mannigfaltigkeit entsprechend verringert worden ist, ist die Anzahl der nötigen Versuche entsprechend vermindert. Dies rührt daher, daß ein Wertepaar der Kenngrößen in der Kennfunktion nicht nur einen einzigen Zustand des Gesamtproblems, sondern eine unendliche Anzahl solcher Zustände wiedergibt, die entstehen, indem man die Maßgrößen, aus denen sich die Kenngrößen zusammensetzen, so verändert, daß die Kenngrößen ihren Wert behalten.

## 2. Ähnlichkeitsgesetze und Modellgesetze.

Wir denken uns nun aus der gesamten Mannigfaltigkeit unseres betrachteten statischen Elastizitätsproblems, für das der funktionale Zusammenhang

$F = 0$  bzw.  $\Phi = 0$  gilt, 2 Fälle H und M herausgegriffen. Die Maßgrößen des ersteren seien  $l, l_1, \dots$  usw. entsprechend Gl. (1), diejenigen des zweiten  $l', l'_1, \dots$  usw. Dann gilt für H Gl. (2) und für M:

$$\Phi\left(\frac{\sigma'}{E'}, \frac{l'_1}{l'}, \frac{l'_2}{l'}, \dots, \frac{P'}{E'l'^2}, \frac{P'_1}{E'l'^2}, \dots, \frac{\xi'_1}{l'}, \frac{\xi'_2}{l'}, \dots, m'\right) = 0. \quad (3)$$

Gl. (2) und (3) werden identisch, wenn alle einander entsprechenden Kenngrößen, also z. B.  $l_1/l$  und  $l'_1/l'$  usw., denselben Zahlenwert besitzen. Wir sagen dann, es besteht „vollkommene physikalische Ähnlichkeit“ zwischen H und M. Sorgt man dafür, daß alle Kenngrößen bis auf eine in H und M zahlenmäßig dieselben sind, so muß auch die letzte, die sog. Suchkenngröße, in H und M dieselbe sein.

In unseren spannungsoptischen Modellversuchen ist  $\sigma/E$  die Suchkenngröße. Ist  $\sigma'$  in M durch Versuch bestimmt worden, so kann demnach durch Gleichsetzen der Suchkenngrößen  $\sigma$  in H berechnet werden, was ja der Zweck und das Ziel der Modellversuche ist. In der anderen vorigen Betrachtungsweise können wir auch sagen: wir machen alle Kenngrößen gleich bis auf zwei, die wir noch als variabel betrachten. Der Zusammenhang zwischen ihnen ist die Kennfunktion. Setzen wir nun auch noch für die eine von ihnen, die unabhängig variable, einen bestimmten Wert ein, so bekommt damit auch die abhängig variable — dies ist die Suchkenngröße — einen zugeordneten Wert, der also ein Punkt der Kennlinie ist.

Soll vollkommene Ähnlichkeit zwischen H und M bestehen, so muß demnach zunächst gelten:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l'_1}{l'}, \frac{l_2}{l} = \frac{l'_2}{l'}, \dots, \frac{\xi_1}{l} = \frac{\xi'_1}{l'}, \dots \quad (4)$$

oder

$$\frac{l}{l'} = \frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \dots = \frac{\xi_1}{\xi'_1} = \dots = \lambda = \text{const}, \quad (4a)$$

ferner:

$$\frac{P}{El^2} = \frac{P'}{E'l'^2}, \frac{P_1}{El^2} = \frac{P'_1}{E'l'^2}, \dots \quad (5)$$

oder

$$\frac{P}{P'} = \frac{P_1}{P'_1} = \dots = \frac{El^2}{E'l'^2} = \kappa = \text{const}. \quad (5a)$$

Gl. (4a) und (5a) besagen, daß bei vollkommener Ähnlichkeit sämtliche Längen in H und M das gleiche Maßstabverhältnis  $\lambda$  besitzen und ebenso alle Kräfte dem gleichen Kräftemaßstab  $\kappa$  unterworfen sein müssen. Dies sind die bekannten Bedingungen der geometrischen Ähnlichkeit und der Ähnlichkeit der Kräfte, die bei statischen Modellversuchen immer erfüllt sein müssen.

Wir setzen im folgenden diese beiden Bedingungen als erfüllt voraus und brauchen dann nur mehr die Bezeichnungen  $l$  und  $P$  bzw.  $l'$  und  $P'$  für Länge und Kraft, da alle übrigen Größen gleicher Art in H und M in derselben Weise voneinander abhängig sind. Dann vereinfachen sich die Kenngrößenbeziehungen (2) und (3) für H und M unseres statisch elastischen Problems zu

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{E}, \frac{P}{El^2}, m\right) = 0 \quad (2a)$$

und

$$\Phi\left(\frac{\sigma'}{E'}, \frac{P'}{E'l'^2}, m'\right) = 0. \quad (3a)$$

Weiterhin muß bei vollkommener Ähnlichkeit sein:

$$m = m'. \quad (6)$$



Wie in Gl. (5) erschienene Kenngröße wird HOOKESche Kenngröße  $\xi = P/El^2$  genannt. Mit Benützung der Bezeichnungen für die Maßstäbe schreibt sich Gl. (5):

$$\frac{\kappa}{\lambda^2} = \frac{E}{E'} \quad (7)$$

Gl. (6) drückt das POISSONSche Modellgesetz aus, das für H und M gleiche Querdehnungszahlen vorschreibt, Gl. (7) heißt HOOKES allgemeines Ähnlichkeitsgesetz.

Außer den Maßstäben für die Grundgrößen bestehen bei Ähnlichkeit auch feste Maßstäbe für die aus ihnen abgeleiteten Größen, z. B. Spannung, Drehmoment usw. Nach der sog. Übertragungsregel für Ableitgrößen erhält man diese Maßstäbe, indem man die gleiche Rechenoperation, die aus den Grundgrößen auf die Ableitgrößen führt, auf die Maßstäbe anwendet. Zum Beispiel ist der Momentenmaßstab

$$\mu = \kappa \cdot \lambda.$$

Für den Maßstab der Dehnungen oder bezogenen Formänderungen ergibt diese Regel, daß er gleich eins ist. Das heißt bei vollkommener Ähnlichkeit müssen die Dehnungen in H und M dieselben sein.

### 3. Zweite Herleitung der Ähnlichkeitsbedingungen aus den Grundgleichungen.

Wir betrachten wieder zwei belastete elastische Körper H und M, für die bereits geometrische und Kräfteähnlichkeit als erfüllt vorausgesetzt sein soll. Der Längen- und der Kräftemaßstab seien  $\lambda$  und  $\kappa$ . Ein weiteres Verfahren, die Ähnlichkeitsbedingungen abzuleiten, besteht nun darin, daß man die Grundgleichungen aller in H und M sich abspielenden physikalischen Grundvorgänge zueinander ins Verhältnis setzt. Wir wollen dieses Verfahren für unser Problem anwenden und werden sehen, daß es ebenfalls auf die bereits gefundenen Gesetze führt.

Der einzige Grundvorgang in unserem Problem ist das HOOKESche Gesetz und läßt sich für den allgemeinsten Fall des dreidimensionalen Körpers am einfachsten mittels der 3 Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ausdrücken:

$$\frac{1}{E} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \frac{\Delta l}{l}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{E'} \left( \sigma'_1 - \frac{\sigma'_2 + \sigma'_3}{m'} \right) = \frac{\Delta l'}{l'}. \quad (9)$$

Dieses Gesetz gilt in der Form (8) für jede beliebige Stelle von H und in der Form (9) für die entsprechende Stelle von M, umfaßt also den ganzen physikalischen Vorgang. Definiert man nun einen für alle sich entsprechenden Spannungen gültigen Spannungsmaßstab  $\chi = \sigma/\sigma' = \sigma_1/\sigma'_1 = \sigma_2/\sigma'_2 \dots$  und dividiert (8) durch (9), so folgt

$$\frac{E'}{E} \chi \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \frac{\Delta l}{\Delta l'} \frac{l'}{l} = 1. \quad (10)$$

Für beliebige Wertetripel  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  kann (10) nur erfüllt sein, wenn  $m = m'$  ist (abgesehen von dem Sonderfall, daß überall  $\sigma_2 = -\sigma_3$  ist, welcher z. B. bei reiner Torsion gegeben ist). Damit ist auf anderem Wege die Notwendigkeit des POISSONSchen Modellgesetzes (6) bewiesen.

Setzt man nach der Übertragungsregel für Ableitgrößen in Gl. (10)  $\chi = \kappa/\lambda^2$ , so folgt weiterhin daraus HOOKES allgemeines Ähnlichkeitsgesetz (7).

Bemerkung: Bei der Aufstellung der Ähnlichkeitsbedingungen für ein bestimmtes Problem muß wohl darauf geachtet werden, daß die herangezogenen Grundgleichungen auch wirklich alle Vorgänge des Problems erfassen. Im Hinblick darauf erscheint mir die Ableitung der allgemeinen Ähnlichkeitsbedingungen für dreidimensionale statisch-elastische Probleme nach den Gl. (8) und (9) einfacher und sicherer als die vielfach angegebene Herleitung aus den elastischen Grundgleichungen, die Differentialgleichungen sind. Solche Differentialgleichungen enthalten meist die Randbedingungen nicht oder nur zum Teil. Arbeitet man mit Differentialgleichungen, so muß man die Randbedingungen gesondert in die Betrachtung hereinnehmen, um Fehlschlüsse durch ihre Nichtbeachtung zu vermeiden. Man findet daher auch oft in der Literatur den Grundsatz aufgestellt, es seien die Grundgleichungen möglichst in bereits integrierter endlicher Form zur Aufstellung der Ähnlichkeitsbedingungen heranzuziehen. Damit kommt man natürlich auch zu einwandfreien Ergebnissen, weil dann auch die Randbedingungen berücksichtigt sind. Nur sind leider die endlichen integrierten Gleichungen meist unbekannt, und man nimmt eben gerade dann, wenn sie unbekannt sind, die Ähnlichkeitsmechanik zu Hilfe.

Die Gl. (8) und (9) gelten sowohl für Punkte im Innern des Körpers als auch für alle Randpunkte, schließen also auch die Randbedingungen in sich ein.

### 4. Erweiterte und angenäherte Ähnlichkeit. Maßstabfehler.

Die zunächst für den allgemeinsten Fall eines physikalischen Vorgangs aufgestellte Kenngrößenbeziehung kann vereinfacht werden, wenn für einen speziellen Fall des Vorganges eine mathematisch gesetzmäßig definierte Beziehung zwischen 2 Maßgrößen und damit auch zwischen 2 Kenngrößen von vorneherein angegeben werden kann. Dann können diese beiden Kenngrößen mit Hilfe der sie verbindenden rechnerischen Gesetzmäßigkeit zu einer einzigen „erweiterten Kenngröße“ zusammengefaßt werden. Damit verringert sich die Anzahl der Kenngrößen des Problems um eine. Das neue dadurch entstandene Gesetz heißt „erweiterte Kenngrößenbeziehung“ und man spricht dann von „erweiterter Ähnlichkeit“. Soll ein Problemkomplex durch Versuche untersucht werden, so bedeutet die Zusammenfassung zweier Kenngrößen den Fortfall einer Versuchsreihe, da der bereits analytisch bekannte Zusammenhang zwischen ihnen nicht mehr versuchsmäßig geklärt zu werden braucht.

Sollen insbesondere 2 Versuche H und M ähnlich sein, so kommt, wenn erweiterte Ähnlichkeit angewandt werden kann, eine Ähnlichkeitsbedingung oder sogar ein Modellgesetz in Wegfall.

In den meisten Fällen ist die gesetzmäßige Beziehung zwischen 2 Kenngrößen, die zur Aufstellung eines erweiterten Ähnlichkeitsgesetzes führt, nur in einem gewissen Bereich streng gültig, oder überhaupt nur näherungsweise erfüllt. In diesem Fall spricht man von angenäherter Ähnlichkeit. Strenggenommen ist auch die vorher definierte vollkommene Ähnlichkeit immer nur eine angenäherte, wenn man in Betracht zieht, daß bei Modellversuchen immer Ungenauigkeiten bei der Modellherstellung, Inhomogenität des Materials, mangelnde Konstanz der elastischen „Konstanten“ und anderes die strenge Ähnlichkeit beeinträchtigen. Bei erweiterter Ähnlichkeit bedingt die hinzukommende Voraussetzung einer gesetzmäßigen Beziehung zwischen 2 Kenn-



größen eine weitere mögliche Quelle des Abweichens von der Strenge. Rein begrifflich braucht erweiterte Ähnlichkeit noch keine angenäherte zu sein, praktisch ist sie es fast immer.

Es ist daher besonders bei erweiterter Ähnlichkeit in jedem Fall genauestens zu prüfen, ob und wie weit jene Voraussetzungen, die zur Aufstellung der erweiterten Ähnlichkeitsbedingungen führen, in *allen* Teilen des in Frage stehenden Vorganges zutreffen.

Der Mangel an Strenge der Ähnlichkeitsbedingungen bei angenäherter Ähnlichkeit ruft Fehler bei der Umrechnung der Ergebnisse von M auf H hervor. Da diese erfahrungsgemäß umso größer sind, je größer die Übertragungsmaßstäbe sind, spricht man gewöhnlich von „Maßstabfehlern“.

### III. Erweiterte Ähnlichkeit hinsichtlich der Formänderungen.

#### 1. Allgemeiner räumlicher Spannungszustand ohne vorgegebene Formänderungsgrößen.

Da, wie eingangs erwähnt, die Bedingung der vollkommenen Ähnlichkeit, daß für H und M gleiche bezogene Formänderungen angewandt werden müssen, in der Spannungsoptik nicht eingehalten werden kann, ist nun vor allem zu prüfen, ob und unter welchen Vorbedingungen die vollkommene Ähnlichkeit so erweitert werden kann, daß im Modell größere bezogene Formänderungen angewandt werden dürfen. Wir betrachten wieder H und M eines gegebenen statisch elastischen Problems und wollen es zunächst dahingehend einschränken, daß lediglich alle äußeren Kräfte gegeber seien und die Spannung  $\sigma$  an einer bestimmten Stelle gesucht sei. Wir setzen also statisch bestimmte Auflagerung voraus. Es sei weiterhin bereits geometrische Ähnlichkeit für die Gestalt des elastischen Körpers und Kräfteähnlichkeit vorausgesetzt. Dann können alle Längen und Kräfte für H und M je durch eine einzige Maßgröße beschrieben werden und die Maßgrößenbeziehungen lauten für H bzw. für M:

$$F(\sigma, l, P, E, m) = 0 \quad (11)$$

und

$$F(\sigma', l', P', E', m') = 0. \quad (12)$$

Wenn über den Spannungszustand sonst keine weiteren Aussagen gemacht werden können, führen diese Beziehungen durch Dimensionsbefreiung auf Gl. (2a) und (3a) und damit auf die strenge Ähnlichkeit.

Nun weiß man aber aus analytisch lösbaren Fällen, daß bei einer sehr großen Gruppe von Festigkeitsproblemen die Spannung und auch die Formänderungen den äußeren Kräften proportional sind. Bei solchen Problemen gelten daher für die Spannung  $\sigma$  und die Verschiebung  $\xi$  an irgendeiner Stelle die Beziehungen:

$$\frac{\sigma}{P} = \text{const} \quad (13) \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{P} = \text{const}. \quad (14)$$

Diese Beziehungen brauchen daher nicht mehr durch den Modellversuch geklärt zu werden, sondern es genügt z. B. für die Lösung des Spannungsproblems, wenn die Größe  $\sigma/P$  ermittelt wird. Damit schreiben sich anstatt (11) und (12) die Gleichungen des Problems:

$$F^*\left(\frac{\sigma}{P}, l, E, m\right) = 0 \quad (15)$$

und

$$F^*\left(\left(\frac{\sigma}{P}\right)', l', E', m'\right) = 0. \quad (16)$$

Dimensionsbefreiung mit  $l$  und  $E$  liefert jetzt die erweiterten Kenngrößenbeziehungen:

$$\Phi\left(\frac{\sigma l^2}{P}, m\right) = 0 \quad (17) \quad \text{und} \quad \Phi\left(\frac{\sigma' l'^2}{P'}, m'\right) = 0, \quad (18)$$

oder anders ausgedrückt, die beiden ersten Kenngrößen in (2a) und (3a) sind zu einer erweiterten Kenngröße  $\sigma l^2/P$  bzw.  $\sigma' l'^2/P'$  zusammengefaßt worden.

Die Bedingung der Ähnlichkeit zwischen H und M ist auch hier wieder, daß die sich entsprechenden Kenngrößen in den Gl. (17) und (18) die gleichen Zahlenwerte annehmen und damit die Gleichungen identisch werden. Gleichsetzen der 2. Kenngrößen liefert wieder das Poissonsche Modellgesetz  $m = m'$ , das gleiche Querdehnungszahlen für H und M vorschreibt, Gleichsetzen der 1. Kenngrößen als einziges Ähnlichkeitsgesetz:

$$\chi = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\lambda}{\lambda'^2}. \quad (19)$$

Dies besagt, daß wir jetzt bei erweiterter Ähnlichkeit außer dem Längenmaßstab  $\lambda$  auch entweder den Kräftemaßstab  $\kappa$  oder den Spannungsmaßstab  $\chi$  beliebig wählen dürfen, und zwar unabhängig von den Elastizitätsmodulen. Die Formänderungen bzw. Verschiebungen gehorchen dann nicht mehr dem Längenmaßstab  $\lambda$ , sondern einem eigenen Formänderungsmaßstab  $\lambda_1$ , der gewöhnlich, wenn es sich nur um das Spannungsproblem handelt, gar nicht bekannt zu sein braucht. Wir können ihn jedoch auch leicht mit den Hilfsmitteln der Ähnlichkeitsmechanik folgendermaßen berechnen: Zwischen der Verschiebung  $\xi$  an irgendeiner Stelle und den gegebenen Größen unseres Problems bestehen für H und M die Maßgrößenbeziehungen:

$$F_1(\xi, l, P, E, m) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(\xi', l', P', E', m') = 0,$$

oder auch, da (14) als gültig vorausgesetzt wird, die Beziehungen:

$$F_1^*\left(\frac{\xi}{P}, l, E, m\right) = 0 \quad \text{und} \quad F_1^*\left(\frac{\xi'}{P'}, l', E', m'\right) = 0.$$

Durch Dimensionsbefreiung mit  $l$  und  $E$  erhält man die erweiterten Kenngrößenbeziehungen:

$$\Phi_1\left(\frac{\xi E l}{P}, m\right) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_1\left(\frac{\xi' E' l'}{P'}, m'\right) = 0.$$

Wenn Ähnlichkeit bestehen soll, müssen die entsprechenden Kenngrößen dieser Gleichungen gleich sein, woraus außer dem bereits als notwendig festgestellten Poissonschen Modellgesetz folgt:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \lambda_1 = \frac{\kappa}{\lambda} \frac{E'}{E}. \quad (20)$$

Wir wollen diese den Formänderungsmaßstab  $\lambda_1$  festlegende Gleichung *erweitertes Hookesches Ähnlichkeitsgesetz* nennen.

Ob die Voraussetzung für die Anwendbarkeit des erweiterten Hookeschen Ähnlichkeitsgesetzes, nämlich Proportionalität zwischen Spannungen, Kräften und Verschiebungen, vorhanden ist, muß im Einzelfall durch Prüfung aller bei dem gegebenen Problem



sich abspielenden Vorgänge entschieden werden. Diese Beurteilung ist oft nicht leicht. Nicht ohne weiteres anwendbar ist die erweiterte Ähnlichkeit, wenn die Formänderungen dadurch, daß sich die geometrische Lage der Kräfte zueinander ändert, das Kräftespiel im Körper beeinflussen. Zum Beispiel bei Plattenproblemen tritt bei starken Formänderungen zum Biegungsspannungszustand noch ein Längsspannungszustand hinzu. Daher ist hier erweiterte Ähnlichkeit nicht ohne weiteres anwendbar, zumindest sind die Voraussetzungen zu prüfen (siehe auch Abschnitt IV 3 und V 2). Der Extremfall der hier auszuscheidenden Fälle sind die Stabilitätsprobleme, die gerade durch ihre Nichtlinearität charakteristisch sind.

## 2. Allgemeiner räumlicher Spannungszustand mit gegebenen Formänderungsgrößen.

Die Betrachtungen des vorhergehenden Abschnitts über erweiterte Ähnlichkeit lassen sich auch auf Probleme übertragen, die früher durch Gl. (1) und durch das Beispiel in Abb. 1 charakterisiert worden sind. Bei diesen Problemen sind nicht alle äußeren Kräfte gegeben, sondern die Auflagerkräfte stellen sich als Folge der vorgegebenen Verschiebungen  $\xi_1, \xi_2$  usw. ein. Zur Ableitung der Ähnlichkeitsbedingungen denke man sich den Verformungszustand durch alle äußeren Kräfte einschließlich der Auflagerkräfte aufgebracht, und zwar sollen die letzteren gerade so groß sein, daß die Verschiebungen  $\xi_1, \xi_2 \dots$  an den gegebenen Punkten erreicht werden. Werden nun im geometrisch ähnlichen Modell die äußeren Kräfte ähnlich im Maßstab  $\lambda$  aufgebracht, so stellen sich bei ihm alle Verschiebungen, also auch  $\xi'_1, \xi'_2$  usw. im Maßstab  $\lambda_1$  nach Gl. (20) ein. Umgekehrt muß sich aber auch infolge der Eindeutigkeit der Lösung des statisch-elastischen Problems derselbe Spannungszustand und Verschiebungszustand einstellen, wenn man bei gegebenen Lasten in M dafür sorgt, daß die vorgegebenen Verschiebungsgrößen im Maßstab  $\lambda_1$  eintreten.

Voraussetzung ist nur, daß der gegebene elastische Körper an sich hinsichtlich seiner Gestalt und der Art des Kraftangriffs den Bedingungen (13) und (14) genügt.

Ein technisch wichtiges Beispiel der eben geschilderten Art ist das HERTZsche Berührungsproblem zweier gewölbter Körper. Die vorgegebenen Verschiebungsgrößen sind hier die Abstände aller gegenüberliegenden Punkte der beiden Körperoberflächen, soweit sie in dem kleinen Bereich der Oberflächen liegen, in dem hernach unter der Wirkung des gegenseitigen Druckes Berührung eintritt. Dieser Zwischenraum in der Umgebung der Berührungsstelle ist somit ähnlich im Formänderungsmaßstab  $\lambda_1$  auszubilden, wenn die erweiterte Ähnlichkeit gewahrt sein soll, deren Voraussetzungen im übrigen erfüllt sind. Denn der hier in Frage kommende Spannungs- und Verschiebungszustand stellt eine Überlagerung des bekannten BOUSSINESQschen Problems der Einzelkraft am elastischen Halbraum<sup>1</sup> an unendlich vielen Stellen dar. Für das BOUSSINESQsche Problem gelten aber die Gl. (13) und (14). Wie im Modellversuch die Berührungsstelle auszubilden ist, sei an Hand der Abb. 2 veranschaulicht. Der Zwischenraum wird ähnlich,

wenn bei jedem der sich berührenden Körper die Abstände  $y$  seiner Oberflächenpunkte von der gemeinsamen Tangentialebene unter sich ähnlich sind. Der Zusammenhang von  $y$  mit dem einen der beiden Hauptkrümmungsradien  $R$  und einer zugehörigen Ortskoordinate  $x$  ist:

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Da beim Berührungsproblem immer  $x$  klein gegen  $R$  ist, kann man nach  $x/R$  entwickeln und erhält für H bzw. für M:

$$y = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R} \quad \text{bzw.} \quad y' = \frac{1}{2} \frac{x'^2}{R'}.$$

$x$  und  $x'$  gehorchen dem Längenmaßstab  $\lambda$ , für  $y$  und  $y'$  gilt der Formänderungsmaßstab  $\lambda_1$ . Daher

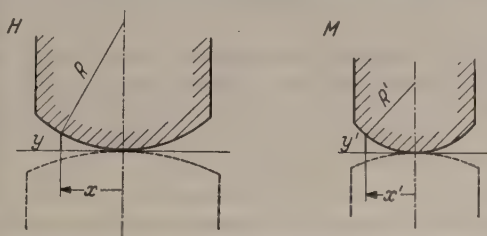


Abb. 2. Berührung zweier gewölbter Körper in Hauptausführung (H) und Modell (M) (schematisch).

folgt durch Division für den Maßstab der Hauptkrümmungsradien:

$$\frac{R}{R'} = \frac{\lambda^2}{\lambda_1}. \quad (21)$$

Treten also in einem Elastizitätsproblem mit erweiterter Ähnlichkeit Berührungen gewölbter Oberflächen auf, so muß in den Berührungsstellen, wenn auch in ihnen die erweiterte Ähnlichkeit gewahrt bleiben soll, für die Krümmungsradien ein gesondeter Maßstab nach Gl. (21) angewandt werden, der vom Längenmaßstab abweicht. Da der Bereich, in dem Berührung stattfindet, gewöhnlich sehr beschränkt ist, wird dies im allgemeinen keine Beeinträchtigung des Spannungszustandes durch die Abweichung von der gegebenen geometrischen Gestalt der Körper bringen. Eine andere Frage ist jedoch, ob im Einzelfall die Herstellung des Modellkörpers möglich ist, wenn eine solche örtliche Abweichung von der geometrischen Gestalt, wie gering sie auch sein mag, vorgeschrieben wird. Zum Beispiel müßten bei dem in letzter Zeit vielfach spannungsoptisch untersuchten Problem von Zahnrädern im Eingriff die Berührungsstellen der Zahnflanken in besagter Weise gesonderte Krümmungsradien erhalten. Da jedoch die Krümmung der Zahnflanken sich bei den bekannten Herstellungsverfahren zwangsläufig ergibt, ist hier eine gesonderte Formgebung sehr problematisch. Vollkommen unmöglich ist sie dann, wenn mit dem gleichen Zahnradsatz mehrere Eingriffsstellungen untersucht werden sollen.

## IV. Beispiele für erweiterte Ähnlichkeit bei Spezialproblemen.

Bei vielen Elastizitätsproblemen können die Ähnlichkeitsbedingungen über die im vorigen Abschnitt gezeigte Erweiterung hinsichtlich der Formänderungen hinaus noch zusätzlich erweitert werden. Man gewinnt dadurch für die Durchführung der Versuche

<sup>1</sup> Siehe hierüber: [16] S. 198.



noch weitere Freiheiten außer derjenigen, daß man einen Formänderungsmaßstab  $\lambda_1$  frei wählen kann.

Wie man mit Hilfe der Gesetze der Ähnlichkeitswissenschaft die Ähnlichkeitsbedingungen für solche Sonderfälle ableitet, soll an einigen der wichtigsten Fälle in folgendem gezeigt werden.

Der Kürze halber schreiben wir von den beiden jeweils für H und M geltenden analogen Gleichungen in folgendem nur mehr diejenige für H an.

### 1. Ebener Spannungszustand ohne gegebene Formänderungsgrößen.

Wie in III 1 wollen wir auch für den ebenen Spannungszustand zunächst den einfacheren Fall voraussetzen, daß alle äußeren Kräfte  $P$ ,  $P_1$  usw. gegeben seien und die Spannung  $\sigma$  (an einer beliebigen Stelle) gesucht sei. Es sei wieder Kräfteähnlichkeit in H und M bereits vorausgesetzt sowie auch Ähnlichkeit der geometrischen Abmessungsgrößen  $l$ ,  $l_1$  usw. in der Ebene des Spannungszustandes, so daß für diese Größen nur je eine einzige Maßgröße  $P$  bzw.  $l$  nötig ist. Jedoch führen wir für die Dicke, die an jeder Stelle unseres elastischen Körpers die gleiche ist und klein gegen die Abmessungen  $l$  sein soll, eine gesonderte Maßgröße  $d$  für H bzw.  $d'$  für M ein. Dann lautet die Maßgrößenbeziehung unseres Problems für H:

$$F(\sigma, P, l, d, E, m) = 0. \quad (22)$$

Nun ist der ebene Spannungszustand bekanntlich in Richtung der Dicke unveränderlich (für unendlich kleines  $d$  gilt dies streng, für kleines  $d$  mit genügender Annäherung). Ändern wir die Dicke, so bleibt der Spannungs- und der Verschiebungszustand derselbe, wenn wir nur die äußeren Lasten proportional ändern, so daß

$$P/d = \text{const} \quad (23)$$

ist. Wir könnten daher, indem wir in Gl. (22) statt  $P$  und  $d$  nur ihren Quotienten vorsehen und hierauf die Dimensionsbefreiung vornehmen, ein Ähnlichkeitsgesetz gewinnen, das nur hinsichtlich der Dicke erweitert ist. Da diese Ähnlichkeit jedoch nur von untergeordneter Bedeutung ist, wollen wir sogleich auch hier wieder voraussetzen, daß für unseren Spannungszustand Proportionalität zwischen den Lasten und den Spannungen und Verschiebungen besteht. Unter Einbeziehung von Gl. (23) nehmen jetzt die Bedingungen (13) und (14) die Gestalt an:

$$\frac{\sigma d}{P} = \text{const} \quad (24) \quad \text{und} \quad \frac{\xi d}{P} = \text{const}. \quad (25)$$

Da wir jetzt zur modellmäßigen Lösung unseres ebenen Elastizitätsproblems nicht mehr  $\sigma$ ,  $P$  und  $d$  einzeln berücksichtigen müssen, sondern nur ihren Quotienten gemäß Gl. (24), vereinfacht sich Gl. (22) zu:

$$F^*\left(\frac{\sigma d}{P}, l, E, m\right) = 0$$

und Dimensionsbefreiung mit  $E$  und  $l$  liefert die Kenngrößenbeziehung:

$$\Phi\left(\frac{\sigma d l}{P}, m\right) = 0. \quad (26)$$

Durch Gleichsetzen der hierin auftretenden beiden Kenngrößen für H und M erhält man als *erweitertes*

### Ähnlichkeitsgesetz für den ebenen Spannungszustand

$$\chi = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\kappa}{\lambda \delta}, \quad (27)$$

sowie das POISSONSche Modellgesetz:  $m = m'$ . Zu den Maßstäben  $\chi$ ,  $\kappa$  und  $\lambda$  kommt jetzt als vierter der Dickenmaßstab  $\delta = d/d'$  hinzu. Da die 4 Maßstäbe durch die einzige Ähnlichkeitsbedingung (27) miteinander verknüpft sind, sind jetzt drei beliebig wählbar.

Die Ähnlichkeitsbedingungen für den ebenen Spannungszustand ohne vorgegebene Formänderungsgrößen vereinfachen sich noch weiter, wenn der ebene elastische Körper einfach zusammenhängend ist, oder wenn, bei mehrfachem Zusammenhang, die MICHELLsche Bedingung erfüllt ist, daß an jeder geschlossenen Berandung die angreifenden äußeren Kräfte keine Resultierende, höchstens ein resultierendes Moment besitzen. In diesen Fällen ist bekanntlich der Spannungszustand unabhängig von der Querdehnungszahl, so daß in (26)  $m$  gestrichen werden kann und die Forderung des POISSONSchen Modellgesetzes  $m = m'$  entfällt.

Einen Beweis für die MICHELLsche Bedingung findet man außer in der Originalarbeit von MICHELL [17] auch in [1].

### 2. Ebener Spannungszustand mit vorgegebenen Formänderungsgrößen.

Für ebene Probleme mit gegebenen Formänderungen nach Art des Beispiels von Abb. 1 werden die Ähnlichkeitsbedingungen vollkommen analog dem Vorgehen in Abschnitt III erhalten. Zunächst stellen wir zur Berechnung des Formänderungsmaßstabes für das Problem des vorigen Abschnittes die Maßgrößenbeziehung  $F$  auf, die mit Benützung der Beziehung (25) eine zusammengefaßte Maßgröße  $\xi d/P$  enthält, machen sie dann mit  $l$  und  $E$  dimensionsfrei und setzen hierauf die Kenngrößen in H und M gleich. Dadurch erhalten wir als Ähnlichkeitsbedingungen das POISSONSche Modellgesetz und als *erweitertes HOOKESches Ähnlichkeitsgesetz für den ebenen Spannungszustand den Formänderungsmaßstab*:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \lambda_1 = \frac{\kappa}{\delta} \frac{E'}{E}. \quad (28)$$

Unter analoger Anwendung der Überlegungen des Abschnitts III 2 folgt auch hier, daß bei gegebenen Formänderungsgrößen Ähnlichkeit erzielt wird, wenn diese im Maßstab  $\lambda_1$  nach Gl. (28) aufgebracht werden. Ebenso werden in analoger Weise andere eventuell nötige Maßstäbe berechnet, so z. B. auch der Maßstab für das HERTZsche Berührungsproblem (Walzenruck) nach Gl. (21).

### 3. Plattenbiegung.

Das zu klärende Plattenproblem sei folgendes: Die Spannungen  $\sigma$  für eine Platte von der Stärke  $h$  mit gegebener Gestalt der Mittelfläche und gegebenen Randbedingungen unter der gegebenen Druckverteilung  $p$  senkrecht zur Plattenfläche durch Modellversuch zu ermitteln. Es sei bereits Ähnlichkeit der äußeren Belastung  $p$  und der geometrischen Abmessungen der Mittelfläche in H und M vorausgesetzt, jedoch wollen wir für die Plattenstärke in M einen



om Längenmaßstab  $\lambda = l/l'$  abweichenden Maßstab  $h'$  noch offenlassen. Dann lautet die Maßgrößenbeziehung unseres Problems:

$$F(\sigma, p, l, h, E, m) = 0. \quad (29)$$

Dimensionsbefreiung mit  $E$  und  $l$  liefert die Kenngrößenbeziehung:

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{E}, \frac{p}{E}, \frac{h}{l}, m\right) = 0. \quad (30)$$

ernach wären 4 Ähnlichkeitsbedingungen zu beachten. Wir werden jedoch sehen, daß wir die Ähnlichkeit bedeutend erweitern können, wenn wir die KIRCHHOFF'schen Annahmen zugrunde legen dürfen, daß  $h$  klein gegen die Abmessungen der Mittelfläche und die Durchbiegungen  $w$  klein gegen  $h$  sind, was bekanntlich bedeutet, daß wir nur mit einem Biegunnungsspannungszustand zu rechnen haben und außerdem die Verformungen durch die Querkräfte vernachlässigen können. Unter diesen Annahmen können die Grundgleichungen für ein Plattenelement, das aus der rechtwinkligen, in der Plattenmittelfläche gelegenen Koordinaten  $yz$  herausgeschnitten ist, geschrieben werden (siehe z. B. [18] S. 430ff.):

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{m+1} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} + \frac{m^2}{m^2-1} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{1}{m} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} \right) + \frac{12}{E h^3} k_{zx} &= 0, \\ \frac{m}{m+1} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z^2} + \frac{m^2}{m^2-1} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{1}{m} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z^2} \right) + \frac{12}{E h^3} k_{yx} &= 0, \\ \frac{\partial k_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zx}}{\partial z} + p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

nd

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{m E x}{m^2-1} \left( m \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_z &= -\frac{m E x}{m^2-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{yz} &= -\frac{m E x}{m+1} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Dabei bedeuten:  $w$  die Durchbiegung,  $x$  eine von der Mittelfläche aus normal gerichtete Koordinate,  $k_{zx}$  und  $k_{yx}$  die Querkräfte und  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{yz}$  die Spannungen. Die beiden ersten Gleichungen in (31) kommen durch Aufstellung des Momentengleichgewichts zustande, wobei jeweils das erste Glied der linken Seite vom Torsionsmoment, das zweite vom Biegemoment herrührt, die dritte durch Aufstellung des Kräftegleichgewichts in der  $x$ -Richtung.

Denkt man sich nun bei einem bestimmten Plattenproblem die äußere Belastung  $p$  (an allen Stellen ähnlich) verändert unter Beibehaltung aller übrigen Umstände, so folgt aus dem linearen System (31), daß dann die Durchbiegungen  $w$  und infolge (32) auch die Spannungen sich nur proportional zu  $p$  ändern können. In gleicher Weise folgt aber auch, daß sich bei Änderung der Dicke  $h$  die Durchbiegungen proportional  $1/h^3$ , die Spannungen proportional  $1/h^2$  ändern. Es gilt also:

$$\frac{\sigma h^2}{p} = \text{const}, \quad (33)$$

was durch den Versuch nicht mehr geklärt zu werden braucht, so daß wir die ersten 3 Kenngrößen in (30)

zu einer erweiterten Kenngröße  $\sigma h^2/p l^2$  zusammenfassen können und die erweiterte Kenngrößenbeziehung erhalten:

$$\Phi\left(\frac{\sigma h^2}{p l^2}, m\right) = 0. \quad (34)$$

Durch Gleichsetzen der Kenngrößen in H und M folgen daraus als Ähnlichkeitsbedingungen für die KIRCHHOFF'sche Platte das POISSON'sche Modellgesetz  $m = m'$  und mit  $p/p' = k/\lambda^2$  das erweiterte Ähnlichkeitsgesetz:

$$\chi = \frac{\sigma}{\sigma'} = \kappa \left( \frac{h'}{h} \right)^2. \quad (35)$$

Wir können also bei Plattenproblem einen vom Längenmaßstab unabhängigen Dickenmaßstab  $h/h'$  frei wählen, natürlich unter der Voraussetzung, daß wir innerhalb der KIRCHHOFF'schen Bedingungen bleiben.

Der sich dann ergebende Formänderungsmaßstab  $\lambda_1 = w/w'$  kann aus einer den eben angestellten Überlegungen analogen Betrachtung, indem in Gl. (29)  $w$  statt  $\sigma$  gesetzt wird, gefunden werden:

$$\lambda_1 = \kappa \lambda^2 \frac{E'}{E} \left( \frac{h'}{h} \right)^3.$$

Bemerkung: Zur Aufstellung der Ähnlichkeitsbedingungen für Platten genügt es nicht, nur die bekannte Plattengleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{12(m^2-1)}{m^2 E h^3} p$$

heranzuziehen. Nach dieser Gleichung könnte es scheinen, als ob man  $m$  mit in die Materialkonstante hineinnehmen könnte und dadurch das POISSON'sche Modellgesetz entbehrlich würde. Dieser Trugschluß kommt dadurch zustande, daß bei der Ableitung der Plattengleichung aus (31) durch Elimination von  $k_{zx}$  und  $k_{yx}$  ein Teil der Randbedingungen verlorengeht.

Unabhängig von  $m$  ist der Spannungszustand in Platten nur in bestimmten speziellen Fällen mit speziellen Randbedingungen. Vgl. hierüber auch [19].

#### 4. Schalen.

Der allgemeine Spannungszustand von Schalen setzt sich zusammen aus einem sog. Längs- oder Membranspannungszustand und einem Biegespannungszustand. Denkt man sich bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen die Schalenstärke  $h$  verändert, so müßten sich die Längsspannungen proportional  $1/h$ , die Biegespannungen proportional  $1/h^3$  ändern. Infolgedessen ist eine Erweiterung der Ähnlichkeit hinsichtlich der Schalenstärke im allgemeinen nicht möglich, und es kann höchstens die erweiterte Ähnlichkeit für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand angewandt werden. Das Modell muß also in strenger geometrischer Ähnlichkeit ausgeführt werden. Ein vom Längenmaßstab abweichender Dickenmaßstab wäre nur dann zulässig, wenn von vorneherein bekannt ist, daß die Schale nur einen Längsspannungszustand besitzt.

#### 5. Ebene Biegeprobleme.

L. BAES [20] und Mitarbeiter haben ein Verfahren zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter ebener Rahmenträger mit biegeungssteifen Knotenpunkten (Vierendeelträger) entwickelt, das darauf beruht, daß durch einen ebenen spannungsoptischen Versuch die Momentennullpunkte bestimmt werden und hierauf die Rechnung wie bei einem statisch bestimmten System durchgeführt wird. Dabei wird die



Annahme gemacht, daß für den Spannungs- und Verformungszustand nur die Biegemomente ausschlaggebend sind nicht aber die Normal- und Querkkräfte. Unter dieser Voraussetzung brauchen die Querschnitte der einzelnen Stäbe des Trägers, die gewöhnlich I-Form besitzen, nicht streng geometrisch ähnlich ausgeführt zu werden, sondern es genügt, wenn ein ebenes Modell so ausgebildet wird, daß seine Stäbe an jeder Stelle eine Biegesteifigkeit  $E'J'$  besitzen, die im gleichen festen Maßstabverhältnis zur Biegesteifigkeit  $EJ$  der betreffenden Stelle der H steht.

Im übrigen wird die Gestalt des M geometrisch ähnlich ausgebildet und die äußeren Kräfte ähnlich aufgebracht, so daß das Problem durch die unabhängigen Maßgrößen  $P$ ,  $l$  und  $EJ$  und die abhängige Maßgröße  $M$  (Biegemoment) beschrieben werden kann, und schließlich wird wieder, um erweiterte Ähnlichkeit anwenden zu können, Proportionalität zwischen Lasten ( $P$ ), Biegemoment ( $M$ ) und Durchbiegungen ( $\xi$ ) vorausgesetzt:

$$\frac{M}{P} = \text{const} \quad (36) \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{P} = \text{const.} \quad (37)$$

Dann lautet unsere Maßgrößenbeziehung:

$$F\left(\frac{M}{P}, l, EJ\right) = 0$$

und nach Dimensionsbefreiung mit  $l$  und  $EJ$  die Kenngrößenbeziehung

$$\Phi\left(\frac{M}{Pl}\right) = 0.$$

Als einzige zu beachtende Ähnlichkeitsbedingung ergibt sich hieraus eine Gleichung zur Berechnung des Momentenmaßstabes  $\mu$ :

$$\mu = \kappa \lambda.$$

Wollen wir auch noch den Maßstab für die Verformung (Durchbiegungen) kennen, so können wir diesen finden, indem wir unter Beachtung von (37) die Maßgrößenbeziehung aufstellen:

$$F_1\left(\frac{\xi}{P}, l, EJ\right) = 0,$$

aus der wir durch Dimensionsbefreiung mit  $l$  und  $EJ$  die Kenngrößenbeziehung erhalten:

$$\Phi_1\left(\frac{\xi EJ}{Pl^3}\right) = 0.$$

Aus ihr ergibt sich durch Gleichsetzen der Kenngrößen für H und M der Formänderungsmaßstab:

$$\lambda_1 = \kappa \lambda^3 \frac{E'J'}{EJ}.$$

## V. Die Maßstabfehler.

### 1. Ursache der Maßstabfehler bei den spannungsoptischen Modellversuchen.

Maßstabfehler treten, wie erwähnt, bei den Modellversuchen dann auf, wenn die Ähnlichkeitsbedingungen nicht streng eingehalten werden können, d. h., wenn mit angenäherter Ähnlichkeit gearbeitet werden muß. Die beiden hauptsächlichen Ursachen von Maßstabfehlern in der Spannungsoptik sind die Unmöglichkeit, das Poissonsche Modellgesetz, das gleiche  $m$  für H und M vorschreibt, einzuhalten, und

der Umstand, daß, wie wir gesehen haben, praktisch immer mit erweiterter Ähnlichkeit hinsichtlich der Formänderungen gearbeitet werden muß, die zugleich immer eine mehr oder weniger angenäherte ist. Beide Ursachen sind durch das Modellmaterial bedingt und daher nicht auszuschalten. Denn die Poissonsche Zahl des Modellmaterials kann man nicht ändern und die erweiterte Ähnlichkeit hinsichtlich der Formänderungen muß man anwenden, um einen für eine genaue Auswertung hinreichenden optischen Effekt zu erzielen.

Beide Fehlerquellen wirken sich in der ebenen Spannungsoptik weit weniger ungünstig aus als in der räumlichen. Abgesehen davon, daß für eine große Anzahl von ebenen Problemen das Poissonsche Modellgesetz überhaupt entfällt, nämlich wenn alle äußeren Kräfte gegeben sind und die MICHELLsche Bedingung erfüllt ist, weicht nach bisherigen Versuchen die Poissonsche Konstante für die Kunstharze bei Zimmertemperatur kaum erheblich von dem Wert  $10/3$  ab, der für Festigkeitsberechnungen gewöhnlich zugrunde gelegt wird.

Für mehrfach zusammenhängende Körper mit gegebenen äußeren Lasten kann auch, sofern durch Nichterfülltsein der MICHELLschen Bedingung ein Einfluß der Poissonschen Konstanten vorhanden ist, dieser experimentell durch das seit langem vorgeschlagene Verfahren der Dislokationen berücksichtigt werden. Dieses geht davon aus, daß der Spannungszustand im 2fach zusammenhängenden Körper einen Eigenspannungszustand enthält, der von  $m$  abhängig ist und den man für sich allein erzeugen kann, indem man den 2fachen Zusammenhang durch einen Schlitz trennt und die Schlitzränder verschoben wieder zusammenklebt. Die Dislokationen haben jedoch wenig praktische Bedeutung erlangt wegen der offensichtlichen experimentellen Schwierigkeiten bei ihrer tatsächlichen Ausführung und weil der Einfluß von  $m$ , wenn er überhaupt beim ebenen Problem vorhanden ist, meist, insbesondere an den Stellen hoher Beanspruchung vernachlässigt werden kann.

Beim Erstarrungsverfahren hat die Poissonsche Konstante annähernd den Wert 2 [19], [21]. Infolgedessen ist gegenüber der ebenen Spannungsoptik beim räumlichen Versuch mit etwas größeren Maßstabfehlern zu rechnen, die durch Nichtbeachtung des Poissonschen Modellgesetzes hervorgerufen werden, zudem beim räumlichen Modellversuch die Ähnlichkeitsmechanik das Poissonsche Modellgesetz praktisch immer fordert. Eine Abhilfe ist natürlich hier noch weniger möglich als in der ebenen Spannungsoptik. Sie würde auch wenig nützen, weil die zweite Quelle von Maßstabfehlern, nämlich die Anwendung von zu großen Formänderungen beim räumlichen Verfahren ebenfalls mehr ins Gewicht fällt als beim ebenen und der Betrag dieser Fehler vermutlich meist denjenigen der durch  $m$  bedingten übersteigt.

### 2. Abschätzung der Maßstabfehler.

Die Größe der Maßstabfehler hängt ganz vom jeweiligen Problem ab und eine Abschätzung der zu erwartenden Abweichungen ist meist nicht leicht. Für das ebene Spannungsproblem des 2fach zusammenhängenden Körpers haben FÖPPL und NEUBER [1] die obere Grenze für den Fehler errechnet, der durch Nichtbeachtung des Poissonschen Modellgesetzes



treten kann. Unter Annahme von  $m = 10/3$  für H und  $m' = 4,4$  für M beträgt sie z. B. 7%. Im allgemeinen ist jedoch eine solche obere Grenze kaum anzugeben und sie würde wohl auch meist zu einer ungünstigen Beurteilung des Sachverhaltes führen, wie auch die Durchrechnung von praktischen Fällen der eben erwähnten Art gezeigt hat, die tatsächlichen Abweichungen, vor allem an den höchstbeanspruchten Stellen, meist weit innerhalb der oberen Grenze liegen.

Der beste Weg zur Beurteilung der möglichen Maßstabfehler dürfte wohl meist der sein, daß man ein verwandtes, dem vorliegenden möglichst nahekommendes Problem ausdenkt, das man theoretisch oder zumindest durch eine Näherung lösen kann. Wie am Vergleichsproblem rechnerisch gefundenen Abweichungen wird man dann mit entsprechender Voricht auf das gegebene Problem übertragen dürfen. Im Beispiel möge dies erläutern.

Zur Abschätzung der Maßstabfehler bei der Untersuchung von Plattenproblemen im Erstarrungsverfahren berechnen wir als Vergleichsproblem die maximale Spannung der durch einen gleichmäßigen Flächen- oder Volumen-Druck  $p$  beanspruchten quadratischen Platte. Als Abmessungen, wie sie für das Erstarrungsverfahren geeignet und möglich sind, wählen wir die Quadratseite  $2a$  zu 30 cm und die Plattenstärke  $h = 2$  cm. Die angenäherte Ähnlichkeit bewirkt Maßstabfehler hauptsächlich durch die Verschiedenheit der Poissonschen Konstanten und durch den Umstand, daß bei großen Formänderungen dem Biegespannungszustand der Platte ein Längsspannungszustand überlagert wird, der bei kleinen Formänderungen entfällt. Wir rechnen daher die Platte nach dem von A. u. L. FÖPPL [15] mitgeteilten Näherungsverfahren zuerst mit Längsspannungszustand und  $m = 2$  und dann nach demselben Verfahren ohne Längsspannungszustand mit  $m = 10/3$ . Die prozentuale Abweichung der Ergebnisse ist der Maßstabfehler.

Das genannte Näherungsverfahren beruht darauf, daß eine Biegefläche nach einer cos-Funktion angenommen und, getrennt für Biege- und Längsspannungszustand, je die Spannung und der zugehörige äußere Druck berechnet wird. Hierauf werden Spannungen und Drucke überlagert. Wir nehmen zunächst den zum Biegespannungszustand gehörigen Druck  $p_1$  zu 0,2 at an und berechnen damit nach [15] S. 139, Gl. 19 den Biegungspeil:

$$f = \frac{1536}{\pi^6} \frac{2(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} \frac{a^4}{4} p_1 = 0,563 \text{ cm.}$$

Für den Elastizitätsmodul  $E$  ist dabei der Wert 350 kg/cm<sup>2</sup> angenommen, der nach [10] den günstigsten Versuchsbedingungen beim Erstarrungsverfahren entspricht. Die zugehörige maximale Biegespannung in der Plattenmitte berechnet sich nach [15], S. 153, Gl. (50):

$$\sigma_b = \frac{384}{\pi^4} \frac{m+1}{m} \frac{a^2}{4h^2} p_1 = 16,65 \text{ kg/cm}^2. \quad (38)$$

Für die Aufrechterhaltung des Längsspannungszustandes zusätzlich erforderliche Druck  $p_2$  ist nach [15], S. 222, Gl. (158) und (159):

$$p_2 = 6,86 \frac{m}{m^2 - 1} \frac{E h}{a^4} f^3 = 0,044 \text{ at}$$

und die zugehörige Längsspannung in der Plattenmitte nach [15], S. 223, Gl. (161):

$$\sigma_l = 0,462 \frac{m E}{m - 1} \frac{f^2}{a^2} = 1,75 \text{ kg/cm}^2.$$

Somit erhalten wir also durch unseren gedachten spannungsoptischen Versuch beim Druck  $p = p_1 + p_2 = 0,244$  at in der Plattenmitte eine Biegezugspannung  $\sigma_b + \sigma_l = 18,4$  kg/cm<sup>2</sup> und eine Biegedruckspannung  $-\sigma_b + \sigma_l = -14,9$  kg/cm<sup>2</sup>.

Die Spannung, die sich ergeben müßte, wenn das POISSONSche Modellgesetz erfüllt wäre und wir unendlich kleine Formänderungen anwenden könnten, berechnet sich, indem wir mit  $p = 0,244$  at und  $m = 10/3$  in Gl. (38) für  $\sigma_b$  eingehen, zu 17,6 kg/cm<sup>2</sup>. Sie ist auf Zug- und Druckseite von gleicher Größe. Damit ist der Maßstabfehler, wenn wir uns aus dem Versuchsergebnis  $\sigma_l$  eliminiert denken und also als Endergebnis die Biegespannung  $\sigma_b = 16,65$  kg/cm<sup>2</sup> ansehen, der gesamte Maßstabfehler  $-5,5\%$ .

Der durch die Verschiedenheit der Querdehnungszahlen allein bedingte Maßstabfehler wäre, wie man durch Einsetzen von 10/3 bzw. 2 in Gl. (38) sieht,  $+15\%$ . Man sieht daraus, daß er im umgekehrten Sinne wirkt wie der Fehlereinfluß der zu großen Formänderungen. Beide Einflüsse heben sich also zum Teil auf.

Die in unserem Versuchsbeispiel auftretende höchste Isochromatenordnung  $n$  wäre, wenn wir nach [10] eine spannungsoptische Materialkonstante von  $S = 2 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{Ordnung}} \cdot \text{cm}$  voraussetzen und annehmen, daß die aus dem Modell herausgeschnittenen Proben eine Stärke von  $d = 1$  cm haben, was nach [19] bei Plattenuntersuchungen ohne weiteres zulässig ist,

$$n = \sigma d / S = 9,2.$$

Die aufgewendete Verformung ist also reichlich; durch Verringerung der Last könnte der Maßstabfehler noch weiter herabgedrückt werden.

Ist es nicht möglich, wie im geschilderten Beispiel, ein Vergleichsproblem zu finden, bei dem die Maßstabfehler rechnerisch ermittelt werden können, so bleibt noch als Ausweg das Vergleichsproblem wenigstens so zu wählen, daß die theoretisch zu erwartenden Werte rechnerisch bestimmbar sind und durch den Versuch festzustellen, wie weit dessen Ergebnisse von diesen theoretischen Sollwerten abweichen.

Bei manchen Problemen lassen sich unter Umständen auch aus den Versuchsergebnissen allein Schlüsse auf die Maßstabfehler ziehen. Ein solches Problem wurde vom Verfasser in der Arbeit [9] behandelt. Dort handelte es sich um die Spannungserhöhungen, die in einem tordierten Stab von quadratischem Querschnitt infolge einer kreisrunden Querbohrung entstehen. Am Rande dieser Bohrung stellt sich hierbei eine antisymmetrische Spannungsverteilung ein, wobei in vier diagonal zueinander liegenden Punkten abwechselnd gleich große Zug- und Druckmaxima auftreten. Beim Versuch verformte sich nun die Kreiskontur der Bohrung zu einem Oval, so daß die Krümmung an der Stelle des Zugmaximums sich verringerte, an der des Druckmaximums sich vergrößerte. Infolgedessen erschien die Zugspannung zu niedrig, die Druckspannung zu hoch.



Die Abweichungen vom Mittelwert der beiden Spannungsmaxima stellen den Maßstabfehler infolge großer Formänderungen dar. Sie betrugen damals 6%.

### Zusammenfassung.

Die strengen Ähnlichkeitsbedingungen für statisch-elastische Modellversuche, die nach den bekannten Grundsätzen der Ähnlichkeitsmechanik aufgestellt werden, sind im allgemeinsten Fall neben geometrischer und Kräfteähnlichkeit das HOOKEsche Ähnlichkeitsgesetz und das POISSONSche Modellgesetz. Ersteres fordert gleiche bezogene Formänderungen, letzteres gleiche Querdehnungszahlen in Hauptausführung und Modell. Bei der modellmäßigen Ermittlung von Spannungszuständen durch die Spannungsoptik müssen jedoch im Interesse der Auswertgenauigkeit fast immer größere Formänderungen angewandt werden als sie durch die strenge Ähnlichkeit vorgeschrieben sind. In den meisten Fällen ist dies zulässig und führt auf sog. erweiterte Ähnlichkeit. Bei dieser gilt für die Formänderungen ein gesonderter, vom Längenmaßstab abweichender Maßstab. Bei Berührung zweier gewölbter Körper ist ferner ein eigener Maßstab für die Krümmungsradien an der Berührungsstelle zu beachten.

Für spezielle Probleme, wie ebener Spannungszustand, Plattenbiegung, ebene Biegung, können die Ähnlichkeitsbedingungen noch zusätzlich erweitert und dadurch noch weitere Freiheiten bei der Versuchsdurchführung gewonnen werden.

Da in der Spannungsoptik mit erweiterter Ähnlichkeit, die praktisch immer eine angenäherte Ähnlichkeit darstellt, gearbeitet werden muß, und ferner das POISSONSche Modellgesetz meist nicht streng erfüllt werden kann, hat man meist mit gewissen Fehlern in den Ergebnissen zu rechnen. Verschiedene Möglichkeiten der Abschätzung dieser sog. Maßstabfehler werden erörtert.

**Literatur.** [1] FÖPPL, L. u. H. NEUBER: Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München: Oldenbourg 1935. — [2] MESMER, G.: Spannungsoptik. Berlin 1939. — [3] FROCHT, M. M.: Photo-elasticity. New York 1940. — [4] VILLENA, L.: Fotoelasticidad. Madrid 1943. — [5] PIRARD, A.: La Photoelasticité. Paris 1947. — [6] OEPPEL, G.: Forsch. Ing.-Wes. 7, 240 (1936). — [7] HILTSCHER, R.: Forsch. Ing.-Wes. 9, 91 (1938). — [8] MÖNCH, E.: Forsch. Ing.-Wes. 13, 12 (1942). — [9] MÖNCH, E.: Kunststoffe 37, 181 (1947). — [10] MÖNCH, E.: Ing.-Arch. 16, 267 (1948). — [11] WEBER, M.: Jb. schiffbau techn. Ges. 20, 355 (1919). — [12] WEBER, M.: Jb. schiffbautechn. Ges. 31, 274 (1930). — [13] WEBER, M.: Forsch. Ing.-Wes. 11, 49 (1940). — [14] WEBER, H.: Über Modellgesetze und Ähnlichkeitsbedingungen für vollkommene und erweiterte Ähnlichkeit bei statischen Elastizitätsproblemen. Diss. Berlin 1939. Würzburg 1940. — [15] FÖPPL, A. u. L. Drang und Zwang. 3. Aufl., Bd. I, München u. Berlin 1941. — [16] FÖPPL, A. u. L.: Drang und Zwang, Bd. II, München u. Berlin 1944. — [17] MICHELL, J. H.: Proc. Lond. math. Soc. 31, 100 (1899). — [18] BIEZENO-GRAMMEL: Technisch. Dynamik. Berlin 1939. — [19] KUHN, R.: Experimentelle Untersuchung elastischer Platten mit Hilfe der Spannungsoptik. Bei der T. H. München eingereichte Diss., erscheint demnächst. — [20] BAES, L.: La poutre sans diagonales et assemblages rigides (Poutre Vierendeel). Trav. Sci. et Ind. 1937. — [21] HETENYI, M.: J. appl. Mech., A 1938, 149. — [22] HAGEN, H.: Technik 3, 6 (1948).

## Zur Elektronen- und Photonenlawine, besonders im Zylinderfeld in $H_2$ .

Von G. MEDICUS, München.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. Oktober 1948.)

In 2 Arbeiten ([1], [2]) wurde unter anderem die Lawinengröße  $N$  berechnet, die sich bei der Anfangsspannung  $U_a$  der TOWNSENDS-Entladung ergibt.  $N$  ist die Gesamtzahl von Elektronen, die ein von der Kathode ausgehendes Primärelektron auf seinem Weg zur Anode durch Stoßionisierung allein der Elektronen ( $\alpha$ -Prozesse) erzeugt. Wenn man, wie es dort geschehen ist, die Zündverhältnisse bei coaxialen Zylindern betrachtet, so treten dabei 2 Fragen auf, die eigentlich erst beantwortet sein müssen, bevor man diese Betrachtungen in einfacher Weise durchführen kann, nämlich erstens: mit welchen Fehlern hat man zu rechnen, wenn man die Lawine  $N$  für das Zylinderfeld mit dem einfachen TOWNSENDSchen Ansatz Gl. (1) berechnet, wo doch der TOWNSENDSche Ionisierungsstoßkoeffizient  $\alpha$  nur für das homogene Feld definiert ist? Zweitens: wenn es sich um die Elektronennachlieferung durch den Photoeffekt des in der Lawine erzeugten Lichtes handelt, so wird die „Lawine“ der angeregten Zustände  $N^*$  meist proportional  $N$  gesetzt. Es ist abzuschätzen, inwieweit diese Proportionalität voraussichtlich erfüllt ist.

Diese beiden Fragen sollen hier als Nachtrag zu den obengenannten Arbeiten behandelt werden.

### I. Die Lawinengröße $N$ für das Feld coaxialer Zylinder.

Bekanntlich [3] ist der TOWNSENDSche Ansatz

$$dN_x = N_x \alpha(x) dx \quad (1)$$

$N_x$  = Anzahl der Lawinenelektronen an der Stelle  $x$ ,  
 $\alpha$  [1/cm] = TOWNSENDScher Stoßionisierungskoeffizient für die Elektronen

strenggenommen nur im homogenen Feld richtig. Je inhomogener das elektrische Feld wird, desto weniger ist der Ansatz (1) von vornherein berechtigt, da  $\alpha$  nur für das homogene Feld definiert ist. Man möchte nun den Ansatz (1) wegen seiner Einfachheit möglichst weitgehend auch bei inhomogenen Feldern beibehalten. Dabei sind unter Umständen beträchtliche Fehler zu erwarten, die abgeschätzt werden müssen, wenn man zuverlässige Aussagen machen will. Dies soll hier — unter Beschränkung auf unedle Gase, insbesondere  $H_2$  — für das Zylinderfeld versucht werden, und zwar auf Grund des folgenden Gedankenganges: unter bestimmten idealisierenden Annahmen ist es möglich, die Abhängigkeit  $\alpha(E/p)$  aus gaskinetischen Betrachtungen abzuleiten, wie das TOWNSEND zuerst getan hat [4]. Trotz der stark



vereinfachenden Annahmen, die dieser Ableitung zugrunde liegen, ergibt sich bekanntlich  $\alpha(E/p)$  wenigstens qualitativ für manche Gase, z. B.  $H_2$  richtig. Eine quantitative Übereinstimmung mit den Meßergebnissen, die ja wegen der Vereinfachungen von vornherein nicht zu erwarten ist, kann nur dadurch erreicht werden, daß gewisse Konstante (mittlere freie Weglänge der Elektronen und Ionisierungsspannung des Gases), die in die Ableitung eingehen, abgeändert werden, so daß sie nur mehr größenordnungsmäßig mit den ursprünglich vorausgesetzten richtigen Werten übereinstimmen.

Es soll nun versucht werden, die Lawinengröße  $N$  für das Feld coaxialer Zylinder in der Weise zu berechnen, daß sie sich direkt aus Stoßbetrachtungen ergibt, ohne daß  $\alpha$  verwendet wird. Wenn in den Endformeln, die sich jetzt nicht aus (1), sondern direkt aus den Stoßbetrachtungen ergeben, die gleichen abgeänderten Konstanten verwendet werden, die das richtige  $\alpha$  aus den entsprechenden Stoßbetrachtungen liefern, so dürfte damit eine verbesserte Darstellung der Lawinengröße im inhomogenen Feld gewonnen sein. Vergleicht man diese verbesserte Darstellung mit der aus (1), d. h. mittels  $\alpha$  gewonnenen, so läßt sich damit voraussichtlich abschätzen, in welchen Fällen die letztere noch brauchbar ist und mit welcher Größenordnung der Fehler dabei zu rechnen ist.

Die Idealisierungen, die TOWNSEND für seine Ableitung von  $\alpha$  voraussetzt, sollen auch hier verwendet werden:

1. Jedes Elektron verliert bei jedem Stoß — sei er ionisierend oder nicht — seine ganze kinetische Energie. Die Elektronen starten also nach jedem „Stoß“ mit der Geschwindigkeit Null. (Für Edelgase würde diese Idealisierung vermutlich — wegen des Vorherrschens rein elastischer Stöße — zu sehr falschen Ergebnissen führen. Daher die erwähnte Beschränkung auf unedle Gase.)

2. Es sollen alle Stöße ionisieren, für die gilt:

$$E\lambda \geq U_i \quad (2)$$

$E$  [V/cm] = elektrische Feldstärke;  $\lambda$  [cm] = freier Weg des Elektrons bis zu dem betrachteten Stoß;  $U_i$  [V] = Ionisierungsspannung des Gasmoleküls,

d. h. die Ionisierungswahrscheinlichkeit des stoßenden Elektrons springt bei der Ionisierungsenergie von 0 auf 1.

3. Die freien Weglängen der Elektronen zwischen den Stößen genügen der CLAUSIUSschen Verteilung

$$w_\lambda d\lambda = e^{-\lambda/\lambda_m} d\lambda/\lambda_m \quad (3)$$

$w_\lambda$  [1/cm] = Wahrscheinlichkeitsdichte für das Vorkommen des freien Weges  $\lambda$ ;  $\lambda_m = A/p_0$  = mittlere freie Weglänge.

Schreibt man in (2) für  $\lambda = \lambda_i$  das Gleichheitszeichen, so ist unter diesen idealen Voraussetzungen folgendes der Fall: alle Stöße, denen ein  $\lambda > \lambda_i$  vorausgeht, führen zur Ionisierung, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit 1; alle Stöße, denen ein  $\lambda < \lambda_i$  vorausgeht, ionisieren nicht. Damit ergibt sich bekanntlich [4]

$$\left. \begin{aligned} \alpha/p_0 &= A \exp(-Bp_0/E), \\ p_0 [\text{Torr}] &= \text{Normaldruck.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  sind dabei folgendermaßen zu interpretieren:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1/p_0 \lambda_m = 1/A [1/\text{Torr} \cdot \text{cm}]; \\ B &= U_i/A [V/\text{Torr} \cdot \text{cm}]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bekanntlich stimmen die aus gemessenen  $\alpha$ -Kurven gewonnenen  $A$  und  $B$  nur größenordnungsmäßig mit der Interpretation (5) überein, wie nach den rohen Annahmen, besonders 1. und 2. nicht anders zu erwarten ist. Wesentlich für das folgende ist die Feststellung, daß die rohen TOWNSENDschen Annahmen einen Verlauf von  $\alpha$  nach (4) liefern, der für gewisse unedle Gase, besonders  $H_2$ , in großen Bereichen von  $E/p_0$  durch Messungen bestätigt wird. Innerhalb dieses Bereiches liefern also die einfachen TOWNSENDschen Vorstellungen das richtige Ergebnis, wenn die ursprünglich zugrunde gelegten Konstanten  $A$  und  $U_i$  etwas, aber nicht größenordnungsmäßig, abgeändert werden, wenn, mit anderen Worten, die empirisch bestimmten Konstanten  $A$  und  $B$  verwendet werden. Dieser Sachverhalt läßt es gerechtfertigt erscheinen, die Lawinengröße  $N$  für das Zylinderfeld in ähnlicher Weise gaskinetisch abzuleiten, wie das von TOWNSEND für das  $\alpha$  geschehen ist. Wir setzen also ein Zylinderfeld

$$E(r) = U/\ln(r_a/r_i) r = E_i r_i/r \quad (6)$$

$$\begin{aligned} r_a [\text{cm}] &= \text{Radius der Außenelektrode} \\ r_i [\text{cm}] &= \text{Radius der Innenelektrode} \\ U [\text{V}] &= \text{Spannung zwischen den Elektroden} \\ E_i [\text{V/cm}] &= \text{Feldstärke an der Innenelektrode} \end{aligned}$$

voraus, und fragen zunächst nach dem Zusammenhang derjenigen freien Weglänge  $\lambda_i(r)$ , die gerade noch zur Ionisierung führt, mit  $U$  und  $E$ . Für nach außen laufende Elektronen (Innenkathode) muß nach (6) für Stöße, die an der Stelle  $r$  stattfinden, gelten:

$$U_i = \int_{r-\lambda_i}^r E(r) dr = E_i r_i \ln(r/(r-\lambda_i)). \quad (7a)$$

Für Elektronen, die nach innen laufen (Außenkathode), muß für Stöße an der Stelle  $r$  gelten:

$$U_i = \int_r^{r+\lambda_i} E(r) dr = E_i r_i \ln((r+\lambda_i)/r). \quad (7b)$$

Daraus wird

$$\lambda_i(r) = r(1 - \exp(-U_i/E_i r_i)) \quad (\text{Innenkathode}). \quad (8a)$$

$$\lambda_i(r) = r(\exp(U_i/E_i r_i) - 1) \quad (\text{Außenkathode}), \quad (8b)$$

Diese Gleichungen besagen, daß an der Stelle  $r$  nur solche Elektronen ionisieren können, die mindestens die Strecke  $\lambda_i(r)$  durchlaufen haben. (Diese Bemerkung machten bereits COMPTON und MORSE [5].)

In einer Schicht zwischen  $r \rightarrow dr$  sollen nun  $dS$  Stöße von Elektronen stattfinden. Von diesen  $dS$  Stößen rührt nach der CLAUSIUSschen Weglängenverteilung (3) folgender Bruchteil  $dN_r$  von Elektronen her, die aus Entfernungen  $\lambda > \lambda_i$  kommen, führt also zur Ionisierung:

$$dN_r = dS \int_{\lambda_i}^{\infty} w_\lambda d\lambda = dS \exp(-\lambda_i(r)/\lambda_m). \quad (9)$$

An der Stelle  $r$  befinden sich nun  $N_r$ -Elektronen, die auf der Strecke  $dr$   $dS$ -Stöße ausführen. Die Stoßwahrscheinlichkeit eines Elektrons ist dabei  $dr/\lambda_m$ .



Also ist

$$dS = N_r dr / \lambda_m. \quad (10)$$

Durch Integration nach  $r$  erhält man bei Beachtung des Vorzeichens von  $dr$  für die beiden Polaritäten aus (8), (9) und (10) mit  $\ln N = \int dN_r / N_r$  (wobei die Zahl der von der Kathode losfliegenden Elektronen = 1):

$$\ln N = \frac{-\exp[-r(1 - \exp(-U_i/E_i r_i))/\lambda_m]}{1 - \exp(-U_i/E_i r_i)} \Big|_{r \approx r_i}^{r \approx r_a} \quad (11a)$$

(Innenkathode),

$$\ln N = \frac{-\exp[-r(\exp(U_i/E_i r_i) - 1)/\lambda_m]}{\exp(U_i/E_i r_i) - 1} \Big|_{r \approx r_i}^{r \approx r_a} \quad (11b)$$

(Außenkathode).

Die Integrationsgrenzen dieser beiden Gleichungen müssen besonders betrachtet werden. Sie sind nämlich nicht einfach  $r_i$  und  $r_a$ , wie das meist angenommen wird. Das von der Kathode ausgehende Primärelektron, das schließlich an der Anode die Lawinengröße  $N$  erzeugt, muß nämlich eine gewisse Mindeststrecke — nennen wir sie  $\lambda_i(r)_k$  — ohne Zusammenstoß durchlaufen haben, bevor es überhaupt günstigenfalls ionisieren kann. Vor der Kathode liegt also immer eine Schicht der Dicke  $\lambda_i(r)_k$ , innerhalb deren keine ( $\alpha$ -) Ionisierungsprozesse vorkommen können. Über diese Schicht darf also nicht integriert werden (darauf wird schon von KRUTHOF und PENNING [6] hingewiesen). Die in einer entsprechenden Schicht vor der Anode startenden Elektronen können zwar auch nicht ionisieren, da sie vorher auf die Anode auftreffen. Das ist aber für die Integrationsgrenzen nicht von Belang, da bei Integration bis zur Anode gerade alle Ionisierungen erfaßt werden, die wirklich vorkommen. Damit ergeben sich folgende Integrationsgrenzen:

$$r_i + \lambda_i(r)_i; \quad r_a \quad (\text{Innenkathode}), \quad (12a)$$

$$r_i; \quad r_a - \lambda_i(r)_a \quad (\text{Außenkathode}), \quad (12b)$$

aus (8a) ergibt sich für  $r = r_i + \lambda_{i,i}$  und  $\lambda_i(r) = \lambda_{i,i}$

$$\lambda_{i,i} = r_i (\exp(+U_i/E_i r_i) - 1) \quad (\text{Innenkathode}), \quad (13a)$$

aus (8b) ergibt sich für  $r = r_a - \lambda_{i,a}$  und  $\lambda_i(r) = \lambda_{i,a}$

$$\lambda_{i,a} = r_a (1 - \exp(-U_i/E_i r_i)) \quad (\text{Außenkathode}), \quad (13b)$$

Die Integrationsgrenzen werden also nach (12a und b) und (13a und b)

$$r_i + \lambda_{i,i} = r_i \exp(U_i/E_i r_i); \quad r_a \quad (\text{Innenkathode}), \quad (14a)$$

$$r_a - \lambda_{i,a} = r_a \exp(-U_i/E_i r_i); \quad r_i \quad (\text{Außenkathode}). \quad (14b)$$

Damit wird aus (11a und b), wenn gleich an Stelle von  $U_i$  und  $\lambda_m = A/p_0$  nach (5) die Konstanten  $A$  und  $B$  eingeführt werden, und wenn die sich ergebenden korrigierten Lawinengrößen mit dem Index  $k$  versehen werden:

$$\ln N_k = \left\{ \begin{aligned} &\exp[-A p_0 r_i (\exp(B/A E_i r_i) - 1)] - \\ &-\exp[-A p_0 r_a (1 - \exp(-B/A E_i r_i))] / (1 - \\ &-\exp(-B/A E_i r_i)) \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

(Innenkathode),

$$\ln N_k = \left\{ \begin{aligned} &\exp[-A p_0 r_i (\exp(B/A E_i r_i) - 1)] - \\ &-\exp[-A p_0 r_a (1 - \\ &-\exp(-B/A E_i r_i))] / (\exp(B/A E_i r_i) - 1) \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

(Außenkathode).

Diese beiden Endgleichungen unterscheiden sich nur durch die Nenner der rechten Seiten.

Man wird zwar nicht erwarten dürfen, daß die Verbesserung, die mit diesen Gleichungen voraussichtlich erreicht ist, quantitativ richtig ist, man wird aber annehmen dürfen, daß für die Fälle, bei denen der Unterschied zwischen  $N$  aus (1) bzw. (16) und  $N_k$  aus (15a und b) hinreichend klein ist, der einfache Ansatz (1) ohne Bedenken verwendet werden darf. Dieser letztere ergibt ja mittels (4) und (6), wenn  $x = r$

$$\ln \dot{N} = A E_i r_i \left\{ \exp(-B p_0 / E_i) - \exp(-B p_0 r_a / E_i r_i) \right\} / B. \quad (16)$$

Es ist zu betonen, daß sowohl (15a und b) als auch (16) natürlich nur für die Fälle gelten können, bei denen die Funktion  $\alpha$  nach (4) verläuft. Dies ist nach den Messungen von AYRES [7] für  $H_2$  in einem Bereich von  $E/p_0$  zwischen etwa 3000 V/cm · Torr und etwa 40 V/cm Torr mit guter Näherung der Fall. Die beiläufigen  $\alpha$ -Messungen von FÜCKS und KETTEL [8] dehnen diesen Gültigkeitsbereich bis zu etwa 25 V/cm Torr nach unten aus. Bei kleineren  $E/p$  treten allerdings Abweichungen von (4) auf ( $\alpha_{\text{gem}} > \alpha_{(4)}$ ). Zuverlässige Messungen bei kleineren  $E/p$  scheinen noch nicht vorzuliegen. In vielen Fällen sind aber die Beiträge, die die Bereiche kleiner  $E/p$  zur Ausbildung der Lawine liefern, vernachlässigbar klein gegenüber den Beiträgen der größeren  $E/p$  eines Zylinderfeldes, bei denen  $\alpha$  nach (4) verläuft. Deshalb erscheint es sinnvoll, z. B. für die Lawinengröße bei der Anfangsspannung in  $H_2$  die Ergebnisse der Formeln (16) und (15a und b) miteinander zu vergleichen und dabei vor allem ein Urteil darüber zu bekommen, für welche Parameterbereiche die einfache Darstellung (16) voraussichtlich noch brauchbar ist. Ein solcher Vergleich ist nicht allgemein durchführbar, da je nach den im einzelnen Fall herrschenden Zündbedingungen sehr verschiedene Verhältnisse vorliegen können. Man wird daher zweckmäßig einige gemessene Zündspannungskurven beispielsweise auswählen und die zugehörigen Ergebnisse miteinander vergleichen.

Vor solchen zahlenmäßigen Auswertungen sind noch folgende Bemerkungen allgemeiner Art zu machen.

1. (15a und b) gehen ersichtlich in (16) über für  $B/A E_i r_i \ll 1$ . Da nach den Meßergebnissen  $E_i r_i$  mit zunehmendem  $p_0$  dauernd anzusteigen scheint (trotz dauernder Abnahme von  $E_i/p_0$ , vgl. z. B. [2], Abb. 2), wird dieser Grenzfall mit zunehmendem  $p_0$  mehr und mehr angestrebt.

2. Sowohl (15a und b) als auch (16) gehen für  $r_i \rightarrow \infty$ , bei  $r_a - r_i = L = \text{const.}$ , in die entsprechende Formel für das homogene Feld über, wovon man sich leicht überzeugt. Es tritt dabei nur wegen der korrigierten Integrationsgrenzen (14a und b) an die Stelle von  $L$  der Ausdruck  $L - \lambda_i$ , wobei  $\lambda_i = B/A E = BL/A U$ . Man erhält also an Stelle der üblichen Darstellung mittels  $\alpha$

$$\ln N = \alpha L = A p_0 L \exp(-B p_0 L / U), \quad (17)$$

die sich ja aus (1) durch Integration zwischen  $x = 0$  und  $x = L$  ergibt, unter Beachtung dieser korrigierten



Integrationsgrenzen (d. h.  $x = \lambda_i$ ;  $x = L$ )

$$\left. \begin{aligned} \ln N_k &= \alpha (L - BL/AU) \\ &= A p_0 L (1 - B/AU) \exp(-B p_0 L/U). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Aus (17) und (18) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} N/N_k &= N^{B/AU} \\ &= \exp[p_0 LB (\exp(-B p_0 L/U))/U]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Für sehr große  $U$  verschwindet also der Einfluß der Korrektur. Betrachten wir insbesondere die Lawinengröße bei der Anfangsspannung (bzw. Zündspannung), d. h.  $U = U_a$ , so ist die Korrektur von  $\ln N$  nach (18) am stärksten für die Minimumspannung, d. h.  $U = U_{\min}$ . Die Korrektur von  $N$  selbst dagegen ist nach (19), je nach der Größe von  $N$ , meist für  $U > U_{\min}$  am größten, nämlich bei

$$U = B p_0 L, \quad (20)$$

wie sich durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von (19) nach  $U$  oder  $p_0 L$  ergibt.

3. (15a und b) lassen einen Einfluß der Polarität erkennen, indem Sinn, daß bei gleicher Spannung  $U$  für Innen- und Außenkathode verschiedene Lawinengrößen  $N_k$  zu erwarten sind, und umgekehrt. Auf einen derartigen Polaritätseffekt wurde bereits von SCHÖFER [9] hingewiesen. Er rührt sowohl von den korrigierten Integrationsgrenzen als auch vom Einfluß des inhomogenen Feldes her. Dagegen liefert die Darstellung mit Verwendung von  $\alpha$  (16) (bei der ja auch die Integrationsgrenzen nicht korrigiert sind) keinen Polaritätseffekt. (Der Einfluß der Polarität auf die  $\beta$ -Zündbedingungen [2] hat mit dem hier besprochenen Polaritätseffekt nichts zu tun, denn dort wird ja  $\alpha$  und  $\beta$  verwendet, d. h. dort treten Korrekturen im Sinn von (15a und b) nicht auf.)

Es soll nun der zahlenmäßige Unterschied zwischen der Darstellung der Lawinengröße nach (15a und b) und derjenigen mittels  $\alpha$  nach (16) für praktische Verhältnisse betrachtet werden. Ein besonders wichtiges Beispiel sind die in [2] behandelten sog. „ $p_0 r_i$ -Grenzkurven“, die aus  $U_a(p; r_a, r_i)$ -Messungen verschiedener Autoren erhalten wurden, und zwar für  $H_2$ , wenn folgende Voraussetzungen erfüllt waren: 1.  $r_a/r_i \gg 1$ , 2. Elektronennachlieferung überwiegend durch den TOWNSENDschen  $\beta$ -Prozeß (Stoßionisierung der positiven Ionen). Unter diesen beiden Voraussetzungen gilt das von TOWNSEND geforderte  $p r_i$ -Gesetz, d. h. die Lawinengröße  $N$  ist eine Funktion nur von  $p_0 r_i$ , für verschiedene  $r_a/r_i$ , wie das in [2] eingehend geschildert ist. Die Auswertung der verschiedenen Meßreihen nach (15a und b) und (16) ist in Abb. 1 dargestellt, und zwar als Funktion von  $p_0 r_i$ . Sie geschah so, daß zunächst  $E_i/p_0$  (gemittelt für die verschiedenen Meßreihen) berechnet wurde (dar-

gestellt in [2], Abb. 2) und für diese  $E_i/p_0$ -Kurven dann  $\ln N$  und  $\ln N_k$  nach (16) und (15a und b), ermittelt wurde.

Der Vergleich der verschiedenen Darstellungen, Abb. 1, ergibt etwa folgendes:

1. Der qualitative Verlauf der  $\ln N$  und  $\ln N_k$  aus (16) und (15a und b) ist (für ein und dieselbe Polarität) der gleiche. Wenn es sich also nur darum handelt, den ungefähren Verlauf der Lawinengröße als Funktion irgendeines Parameters zu ermitteln, so wird (wenigstens bei  $H_2$ ) meist die einfache Darstellung nach (16) genügen. Damit dürfte gezeigt sein, daß die in [2] aus dem Verlauf von  $\ln N$  nach (16)

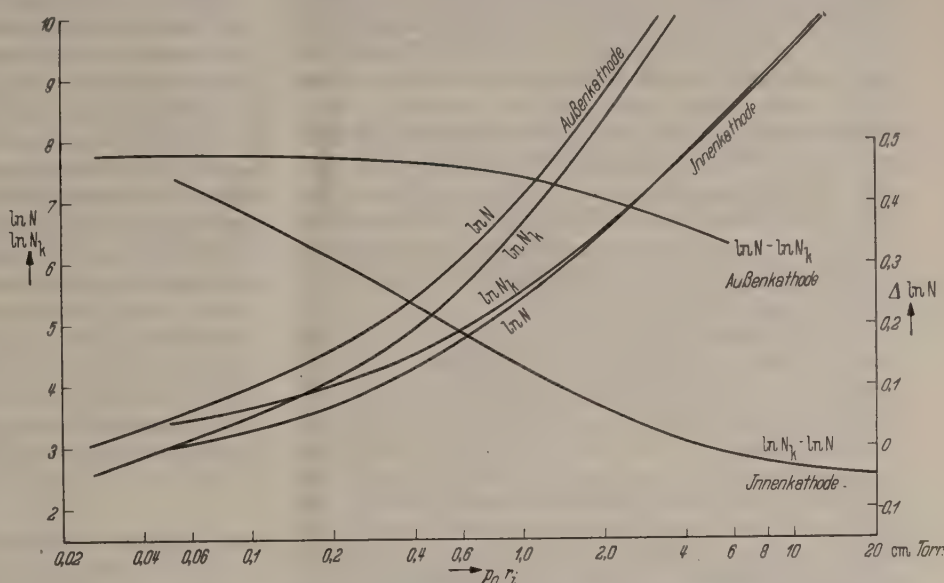


Abb. 1. Die mittels des TOWNSENDschen Stoßkoeffizienten  $\alpha$  berechnete Lawinengröße  $N$  und die direkt aus Stoßbetrachtungen berechnete Lawinengröße  $N_k$  als Funktion von  $p_0 r_i$  (Normaldruck mal Radius der Innenelektrode) bei der Anfangsspannung in  $H_2$  für sehr große Radienverhältnisse der Zylinderelektroden, und zwar für die sog. „ $p_0 r_i$ -Grenzkurven“ der Arbeit [2]. Dazu der ungefähre Verlauf von  $\ln N - \ln N_k$ , bzw.  $\ln N_k - \ln N$ .

gezogenen qualitativen Schlüsse zu Recht bestehen. Die korrigierten  $\ln N_k$  nach (15a und b) stimmen zwar noch etwas schlechter mit den dort berechneten theoretischen Zündspannungskurven überein als die unkorrigierten, diese zusätzliche Abweichung durch diese Korrekturen sind aber aus den in [2] angegebenen Gründen belanglos.

2. Die quantitativen Unterschiede sind nur bei kleinen  $p_0 r_i$  wesentlich. Bei Innenkathode ist  $\ln N_k$  bei  $p_0 r_i \approx 0,05$  Torr cm etwa 13% größer als  $\ln N$  (wobei  $N_k/N \approx 1,55$ ). Mit zunehmendem  $p_0 r_i$  nimmt der prozentuale Unterschied zwischen  $\ln N$  und  $\ln N_k$  ab. Er kehrt bei etwa  $p_0 r_i \approx 4$  sein Vorzeichen um, bleibt aber weiterhin sehr klein. Bei Außenkathode ist  $\ln N_k$  bei  $p_0 r_i \approx 0,025$  um etwa 17% kleiner als  $\ln N$  (wobei  $N/N_k \approx 2,1$ ). Der prozentuale Unterschied nimmt mit zunehmendem  $p_0 r_i$  allmählich ab, z. B. bis auf etwa 2% bei  $p_0 r_i \approx 20$  (wobei  $N/N_k \approx 1,4$ ). Eine Vorzeichenumkehr der Differenz tritt bei dieser Polarität nicht ein.

Die Korrektur macht sich also bei den beiden Polaritäten in ganz verschiedener Weise bemerkbar. Dies beruht darauf, daß sie von zwei verschiedenen Einflüssen herrührt, die bei den beiden Polaritäten sich verschieden auswirken, nämlich erstens von der Inhomogenität des Feldes, zweitens von den



korrigierten Integrationsgrenzen. Der letztere Einfluß kann nur bei Innenkathode eine Rolle spielen, da bei Außenkathode mit  $r_a/r_i \gg 1$  eine kleine Änderung von  $r_a$  nichts ausmacht. Aus diesem Grund haben wir es im Fall der Außenkathode ausschließlich mit der Korrektur durch die Inhomogenität des Feldes zu tun. Da nun die stoßenden Elektronen am Ort der Stoßionisierung bei der genaueren Betrachtung nach (15b) eine kleinere kinetische Energie besitzen als nach der Darstellung mit  $\alpha$  (16), muß man in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Abb. 1 in diesem Fall überall  $N_k < N$  erwarten. Im Fall der Innenkathode dagegen sind *beide* Korrekturinflüsse vorhanden. Der Einfluß der Inhomogenität des Feldes wirkt sich hier natürlich im umgekehrten Sinn aus wie bei Außenkathode, d. h. die Stoßenergie der Elektronen ist hier größer als in der Darstellung mit  $\alpha$ . Dazu kommt aber hier der Einfluß der Integrationsgrenze  $r_{ik} > r_i$ , der dem Einfluß der Inhomogenität des Feldes entgegenwirkt. Dadurch ist hier eine Vorzeichenumkehr der Korrektur möglich. Bei kleinen  $p_0 r_i$  überwiegt der Einfluß der Inhomogenität des Feldes (wegen der großen  $E_i/p_0$ ). Bei großen  $p_0 r_i$  überwiegt der Einfluß der korrigierten Integrationsgrenze, wenn auch sehr schwach.

Beim homogenen Feld ist natürlich nur der Einfluß der korrigierten Integrationsgrenze vorhanden. Aus (17) und (18) folgt  $\ln N_k / \ln N = 1 - B/A U$ . Betrachten wir wieder die Verhältnisse bei der Anfangsspannung, d. h. also bei  $U = U_a$ , so sieht man ohne weiteres, daß hier bei der Minimumspannung der Unterschied der Ergebnisse von (17) und (18) am größten sein muß, allerdings nur für die *Logarithmen* der Lawinengrößen. Für  $H_2$  mit  $U_{\min} \approx 270$  V und  $B/A \approx 26$  V ist  $\ln N_k$  um etwa 10% kleiner als  $\ln N$ . Der Unterschied zwischen  $N_k$  und  $N$  selbst ist nach (20) nicht bei der Minimumspannung, sondern bei einer etwas größeren ( $\approx 300$  V) und bei  $p_0 L > (p_0 L)_{\min}$ , nämlich bei  $p_0 L \approx 2$  cm Torr am größten ( $(p_0 L)_{\min} \approx 1$  cm Torr). Es ergibt sich aus [2], Abb. 3, mittels (20)  $(N/N_k)_{\max} \approx 1,5$ , während  $(N/N_k) U_{\min} \approx 1,3$  ist. Für sehr *kleine*  $p_0 L$  und große  $U_a$  („links“ von  $U_{\min}$ ) verschwindet der Einfluß der Korrektur sehr rasch, da die Elektronen wegen der großen Feldstärken hier schon nach sehr kurzer Laufstrecke die Ionisierungsenergie erreichen. Für sehr *große*  $p_0 L$  und große  $U_a$  („rechts“ von  $U_{\min}$ ) verschwindet der Einfluß der Korrektur weniger rasch, da hier  $E/p_0$  mit zunehmendem  $p_0 L$  abnimmt (vgl. [2], Abb. 2), so daß die Elektronen relativ große Strecken stoßfrei durchlaufen müssen, bis sie die Ionisierungsenergie erreicht haben. Das heißt also, die korrigierte Integrationsgrenze muß sich rechts vom  $U_{\min}$  relativ stärker bemerkbar machen als im Gebiet links von  $U_{\min}$ .

## II. Die „Lawine der angeregten Zustände“ $N^*$ .

Eine wesentliche Voraussetzung für die in [1] durchgeführten Betrachtungen über die Absorption des Lawinenlichtes im Gas war die Annahme, daß die Lawine der angeregten Zustände  $N^*$  proportional sein soll der zugehörigen Elektronenlawine  $N$ , z. B. bei Änderung des Gasdruckes. Dies ist ja keineswegs selbstverständlich, denn innerhalb der einzelnen Meßreihen, bei denen meist der Gasdruck geändert wird, ändern sich ja die Feldstärkeverhältnisse, insbesondere  $E_i/p$ , ganz wesentlich (vgl. [2], -Abb. 2).

Nur wenn  $E_i/p$  dabei konstant bliebe, wäre diese Proportionalität selbstverständlich. Sie wird zwar meist angenommen (z. B. [3]), scheint aber weder experimentell noch theoretisch näher untersucht worden zu sein.

In Anbetracht der erheblichen Schwierigkeiten, die derartigen Untersuchungen entgegenstehen, soll hier nur in primitiver Weise versucht werden, wenigstens zu zeigen, daß eine solche (angenäherte) Proportionalität nicht von vornherein ausgeschlossen werden muß. Als zuverlässiger Beweis der Proportionalität können die hier durchgeführten Betrachtungen aber keineswegs gelten, da die Idealisierungen, die hier — in ähnlicher Weise wie in I. — gemacht werden, noch gewagter erscheinen müssen als dort. Es ergeben sich indessen einige wichtige Folgerungen allgemeingültiger Art auch aus diesen einfachen Betrachtungen.

$N^*$  soll die Gesamtzahl der angeregten Zustände einer bestimmten Energie sein, die bei der Ausbildung einer Elektronenlawine  $N$  entstehen. Alle uns interessierenden angeregten Zustände sollen aus dem Grundzustand des neutralen Moleküls durch Elektronenstoß erzeugt werden. (Stufenweise Anregung spielt wegen der geringen Stromdichten, und da voraussichtlich keine metastabilen Zustände vorhanden sind, keine Rolle.) Es liegt nahe, nach dem Vorgang von ROGOWSKI [10], für die Stoßanregung einen Ansatz zugrunde zu legen, der dem Ansatz (4) für die Stoßionisierung der Elektronen analog ist:

$$\alpha^*/p_0 = A^* \exp(-B^* p_0/E). \quad (21)$$

In Analogie zu (5) ist dann

$$A^* = W^*/A = W^* A, \quad (22)$$

wo  $W^*$  eine mittlere Anregungswahrscheinlichkeit je Stoß für den betrachteten angeregten Zustand bedeutet, und

$$B^* = U^*/A = B U^*/U_i, \quad (23)$$

wo  $U^*$  die Anregungsspannung für den betrachteten angeregten Zustand, und  $U_i$ , wie bisher, die Ionisierungsspannung des Moleküls ist. Der Unterschied zwischen dem Ansatz für die Ionisierung (4) und dem für die Anregung (21) ist ersichtlich nur der, daß in (21) die Anregungswahrscheinlichkeit  $W^* < 1$  gesetzt wird, während in (4) die Ionisierungswahrscheinlichkeit  $W_i = 1$  gesetzt wurde.

Die Idealisierungen, die dem ROGOWSKISCHEN Ansatz (21) zugrunde liegen, sind in Analogie zu den Idealisierungen von I. folgende:

1. Alle Stöße sollen vollkommen unelastisch sein (ebenso wie in I.).

2. Die Anregungswahrscheinlichkeit springt bei der Stoßenergie  $e \cdot U^*$  von 0 auf  $W^* (< 1)$ , und bleibt mit wachsender Stoßenergie konstant<sup>1</sup>).

3. Es soll das CLAUSIUSsche Weglängenverteilungsgesetz gelten (wie in I.).

Es werden also auch hier wieder, wie in I., die elastischen Stöße nicht berücksichtigt. Noch gefährlicher aber erscheint hier die Idealisierung 2., die

<sup>1</sup> Der Widerspruch, der darin liegt, daß die Ionisierungswahrscheinlichkeit  $W_i = 1$ , während die Anregungswahrscheinlichkeit  $W^* < 1$  kommt daher, daß in der Interpretation (5) eine Willkür steckt. Es könnte bei geändertem  $A$  ebensogut  $W_i < 1$  gesetzt werden (was ja der Fall sein muß, wenn bei größeren Stoßenergien  $0 < W^* < 1$  sein soll).



— abgesehen von dem *linearen Anstieg* der Anregungswahrscheinlichkeit bei  $U^*$  — auch ein etwaiges *Maximum* der Anregungswahrscheinlichkeit unberücksichtigt läßt. Derartige — unter Umständen sehr ausgeprägte — Maxima der Anregungswahrscheinlichkeit, die größenordnungsmäßig bei etwa  $2U^*$  auftreten können, würden also, falls sie vorhanden sind, voraussichtlich zu wesentlich anderen Ergebnissen führen als die hier durchgeführten Betrachtungen. Es ist aber meines Wissens bisher über die Anregungsverhältnisse des H<sub>2</sub> in der Nähe der Ionisierungsspannung (die uns hier wahrscheinlich ausschließlich interessieren) nichts bekannt.

Mit Rücksicht auf diese Unkenntnis wollen wir uns hier versuchsweise mit dem einfachen ROGOWSKI-schen Ansatz (21) begnügen und die Ergebnisse durch einige qualitative Betrachtungen ergänzen. Des weiteren soll hier für die Elektronenlawine  $N$  der Ansatz (1) zugrunde gelegt werden, dessen Fehler für diese überschlägigen Betrachtungen nach den Ergebnissen von I voraussichtlich unerheblich sein werden, zumal da sie durch entsprechende Fehler in  $N^*$  zum großen Teil kompensiert werden. Für die Lawine der angeregten Zustände einer bestimmten Energie muß zunächst allgemein gelten:

$$\left. \begin{aligned} dN_r^* &= \pm \alpha^* N_r dr, \\ dN_r &= \pm \alpha N_r dr \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$N_r$  = Zahl der Lawinenelektronen, die ein von der Kathode ausgehendes Elektron beim Radius  $r$  erzeugt hat;  $N_r^*$  = Zahl der angeregten Zustände, die in der Lawine bis zum Radius  $r$  erzeugt wurden.

Das Pluszeichen gilt für Innenkathode, das Minuszeichen für Außenkathode. Verwendet man die  $\alpha^*$  und  $\alpha$  aus (4) und (21), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} N^*/N &= \frac{A^* E_i r_i}{B} \left( \frac{B}{A E_i r_i} \right)^{B^*/B} e^{x_a} \times \\ &\times \int_{x_a}^{x_i} x^{(B^*/B-1)} e^{-x} dx \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

(Innenkathode),

$$\left. \begin{aligned} N^*/N &= \frac{A^* E_i r_i}{B} \left( \frac{B}{A E_i r_i} \right)^{B^*/B} e^{-x_i} \times \\ &\times \int_{x_a}^{x_i} x^{(B^*/B-1)} e^x dx \end{aligned} \right\} \quad (25b)$$

(Außenkathode),

wobei  $x = A E_i r_i / B \exp(Bpr/E_i r_i)$  ( $x_i$  bedeutet  $r = r_i$ ; entsprechend für den Index  $a$ ). Die beiden Integrale sind nicht einfach auswertbar<sup>1</sup>.

Es fällt zunächst auf, daß für die beiden Polaritäten verschiedene Verhältnisse auftreten. Die Verschiedenheit ist um so größer, je größer der Unterschied zwischen  $B^*$  und  $B$ , d. h. zwischen Anregungsspannung  $U^*$  und Ionisierungsspannung  $U_i$  ist. (Für  $B^* \rightarrow B$  werden die beiden Gleichungen identisch.) Das heißt also: bei gleichen Lawinengrößen  $N$  ergeben sich verschiedene  $N^*$ , je nachdem, ob die Elektronen nach innen oder nach außen laufen, und zwar ist  $N^*$  im letzteren Falle größer. Dies ist ohne weiteres einzusehen, wenn man bedenkt, daß die

<sup>1</sup> Man kann sie lediglich als Differenz unvollständiger  $\Gamma$ -Funktionen darstellen.

Elektronenlawine im Fall der Innenkathode zunächst rasch anwächst, so daß eine *große* Anzahl von Elektronen die Gebiete kleiner Feldstärken durchläuft, wogegen bei Außenkathode nur eine *kleine* Anzahl von Elektronen die Gebiete kleiner Feldstärken durchläuft. Diese Unsymmetrie des Anstieges der Elektronenlawine hat zur Folge, daß die Zahl der nicht-ionisierenden Stöße — und damit  $N^*$  — bei Innenkathode größer ist als bei Außenkathode. Diese Tatsache dürfte weitgehend unabhängig sein von den speziellen Annahmen über den Verlauf von  $\alpha^*$  und  $\alpha$ , und kann für die Diskussion der photoelektrischen Elektronennachlieferung von Bedeutung sein.

Für das homogene Feld läßt sich (24) natürlich allgemein integrieren. Man erhält

$$N^*/(N-1) = \alpha^*/\alpha. \quad (26)$$

Für  $\alpha^*$  und  $\alpha$  nach den hier verwendeten speziellen Ansätzen (4) und (21) wird daraus

$$N^*/(N-1) = A^* (\exp [Bp_0 L (1 - B^*/B)/U]) / A. \quad (27)$$

Zu dem gleichen Ergebnis muß natürlich der Grenzübergang  $r_a \rightarrow \infty$  mit  $r_a - r_i = L$  in (25a und b) führen, was man aber nicht ohne weiteres sieht. Dagegen ergibt sich ohne weiteres für  $B^* \rightarrow B$  und  $A^* \rightarrow A$  (d. h.  $\alpha^* \rightarrow \alpha$ ) in (25a und b)  $N^* = N - 1$ , d. h. allgemein, daß die Lawine der angeregten Zustände stets mit 0 beginnt, während die Elektronenlawine mit 1 beginnt.

Wie man aus (25a und b) für das Zylinderfeld und aus (27) für das homogene Feld sieht, ist eine *genaue* Proportionalität der beiden Lawinen nirgends erfüllt, jedenfalls nicht bei unseren idealen Annahmen. Es handelt sich jetzt darum, die zahlenmäßigen Abweichungen von der Proportionalität für die uns voraussichtlich interessierenden Verhältnisse festzustellen. Wir wollen uns dabei mit Rücksicht auf [1] auf den Fall der Außenkathode beschränken und beachten, daß wahrscheinlich immer  $1 - B^*/B$  wesentlich kleiner als 1 ist (sonst wären übrigens unsere Ansätze wahrscheinlich von vornherein sinnlos).

Beim H<sub>2</sub>-Molekül liegt der unterste Anregungszustand, dessen Emission voraussichtlich für die Elektronennachlieferung wesentlich ist, sehr wahrscheinlich 27,5% unterhalb  $U = 15,4$  V, bei 11,13 V [11]. Für die Lawine dieser angeregten Zustände bei 11,13 V wird also die Abweichung von der Proportionalität mit der Elektronenlawine am größten sein, denn für  $U^* = U_i$  herrscht ja, wie der eben gemachte Grenzübergang zeigt, praktisch vollkommene Proportionalität (da  $N \gg 1$  für alle praktisch interessierenden Fälle). Es wurde deshalb für die zahlenmäßige Auswertung von (25b) dieser Anregungszustand zugrunde gelegt. Damit beträgt  $U^*/U_i = B^*/B = 11,13/15,4 = 0,725$ . Die Anregungswahrscheinlichkeit  $W^*$  (und damit  $A^*$ ) ist nicht bekannt. Da hier nicht die Absolutwerte von  $N^*$ , sondern nur die Abweichungen von der Proportionalität von  $N^*$  mit  $N$  interessieren, wurde in (25b)  $A^*/A^{B^*/B} = 1$  gesetzt. [Damit wird in (27)  $A^*/A = 0,641$ ].

Das Integral in (25b) wurde durch Reihenentwicklung ausgewertet. Die Konvergenzverhältnisse liegen für  $x$  kleiner als etwa 10 so, daß keine besonderen Kunstgriffe nötig sind.



Die Abb. 2 zeigt die Abweichung von der Proportionalität für einige der in [1] verwendeten Meßreihen, sowie für das homogene Feld (aus den Messungen von Fucks und KETTEL [8]). Es ist aufgetragen  $N^*/N$  in willkürlichen Einheiten als Funktion von  $p_0 L$  (Druck mal Schlagweite), mit dem Radienverhältnis  $r_a/r_i$  als Parameter. Wenn die Proportionalität — wenigstens innerhalb der einzelnen Meßreihen — erfüllt wäre, so müßten die Kurven horizontal verlaufen. Am schwächsten sind die Abweichungen von der Proportionalität bei dem größten Radienverhältnis  $r_a/r_i \approx 100$ . Die Kurve steigt von etwa 0,75 bei dem kleinsten  $pL$  auf etwa 0,95 bei  $pL \approx 1500$

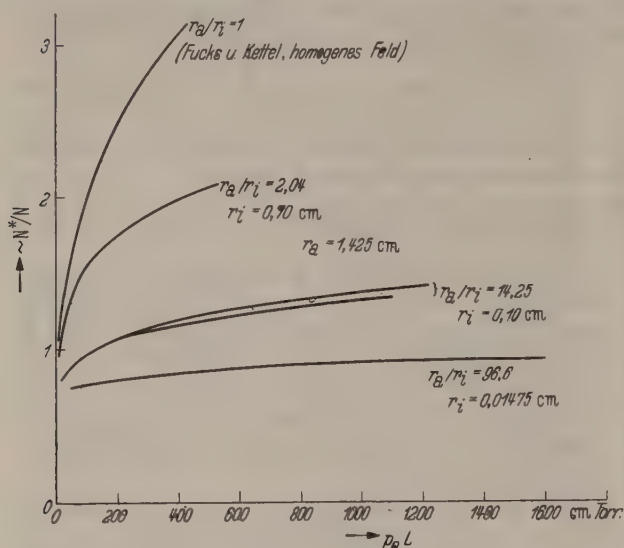


Abb. 2. Verhältnis der Lawine der angeregten Zustände  $N^*$  zur Elektronenlawine  $N$ , bei der Anfangsspannung in  $H_2$ , in willkürlichem Maßstab, als Funktion von  $p_0 L$  (Normaldruck mal Schlagweite), für eine Anregungsspannung  $U^* = 11,13$  V.

an. Dieser Anstieg ist für die Absorptionsbetrachtungen von [1], wo sich ja  $N$  zwischen etwa  $10^2$  bis etwa  $10^6$  ändert, vollkommen belanglos. Etwas größer sind die Abweichungen bei  $r_a/r_i = 14,25$ , aber auch hier berühren sie in Anbetracht der großen Änderungen von  $N$  die Absorptionsbetrachtungen in [1] nicht. Es ist übrigens interessant, zu bemerken, daß die Abweichungen zwischen den beiden bisher betrachteten Kurven nicht etwa auf das verschiedene Radienverhältnis der Elektroden an sich zurückzuführen ist ( $r_a$  ist für beide Fälle praktisch noch unendlich groß), sondern ausschließlich auf die verschiedenen  $E_i/p$ , die für gleiche  $pL$  hier herrschen. Verkleinerung von  $E_i/p$  bedeutet ganz allgemein Vergrößerung von  $N^*/N$ . Entsprechend sind die  $E_i/p$  für die höher liegenden Kurven kleiner als für die tiefer liegenden. Die kleinsten  $E_i/p$  treten beim homogenen Feld auf (vgl. [2], Abb. 2), deshalb sind die Abweichungen von der Proportionalität hier bei weitem am stärksten.

Falls also unsere Voraussetzungen bezüglich  $\alpha^*$  und  $\alpha$  einigermaßen erfüllt sind, ist damit gezeigt, daß die in [1] gemachten Absorptionsbetrachtungen jedenfalls keinen groben Fehler enthalten, der auf eine nicht erfüllte Proportionalität zwischen  $N^*$  und  $N$  beruht. (Der Anstieg von  $N^*/N$  mit  $p_0 L$  zeigt, daß die in [1] bestimmten Absorptionskoeffizienten jedenfalls nicht zu groß, sondern höchstens zu klein sind.)

Man wird nun zweckmäßigerweise versuchen — immer im Hinblick auf die Verhältnisse in [1] — den

Einfluß etwaiger Maxima der Anregungsfunktionen auf den Verlauf von  $N^*/N$  — und damit auf die Absorptionsbetrachtungen in [1] — qualitativ zu verfolgen. Dies dürfte sehr einfach in folgender Weise geschehen können: die grundlegende Voraussetzung, die hier wesentlich ist, ist die, daß in allen bisher untersuchten Fällen  $E_i/p$  mit zunehmendem  $p$  (und damit  $pL$ ) abnimmt (vgl. z. B. [2], Abb. 2). Somit steigt die Gesamtzahl der Stöße (ionisierende und nicht ionisierende) je ionisierenden Stoß mit zunehmendem Druck jedenfalls an. Bei der normalerweise zu erwartenden Lage etwaiger Maxima der Anregungsfunktionen  $W^*(U)$  gegenüber der Ionisierungsfunktion  $W_i(U)$  muß man also bei zunehmendem Druck, d. h. bei abnehmendem  $E_i/p$ , allenfalls eine stärkere Zunahme von  $N^*$  erwarten, als etwa nach Abb. 2. Wenn das Lawinenlicht — d. h. die Emission der  $N^*$  — nicht im Gas absorbiert würde, so hätte man also bei rein photoelektrischer Elektronennachlieferung eine Abnahme von  $N$  mit  $p$  — und damit mit  $pL$  — zu erwarten (vgl. photoelektrische Zündbedingung [1], Gl. (8)). Die in Wirklichkeit auftretende starke Zunahme von  $N$  mit  $p$  kann also aller Voraussicht nach auch nicht auf solchen Maximis der Anregungsfunktion beruhen.

Die Übereinstimmung der in [1] abgeleiteten Absorptionskoeffizienten mit den aus direkten Absorptionsmessungen gewonnenen Werten kann umgekehrt als Anzeichen dafür betrachtet werden, daß in Wirklichkeit die Proportionalität zwischen  $N^*$  und  $N$  bei hinreichend großen  $r_a$  und  $r_i$  mit guter Näherung erfüllt ist, d. h. aber auch, daß der ROGOWSKISche Ansatz für  $\alpha^*$  einigermaßen berechtigt ist.

Die Verhältnisse bei sehr großen  $E_i/p$ , bei denen kleine  $N^*/N$  zu erwarten wären, wenn die Anregungsfunktionen ausgeprägte Maxima aufweisen, interessieren uns nicht, da für diese Fälle die photoelektrische Nachlieferung nach den Ergebnissen von [2] keine Rolle spielt.

### Zusammenfassung.

1. Die Elektronenlawinen bei der TOWNSEND-Entladung im Feld coaxialer Zylinder (mit dem homogenen Feld als Grenzfall) wird aus Stoßbetrachtungen abgeleitet, wobei die gleichen Idealisierungen verwendet werden, die TOWNSEND für die Ableitung des Stoßionisierungskoeffizienten  $\alpha = p_0 A \exp(-B p_0/E)$  verwendet. Gegenüber der Berechnung der Elektronenlawine mittels  $\alpha$ , die ja bei inhomogenen Feldern fehlerhaft ist, sind in dieser genaueren Darstellung zweierlei wesentliche Einflüsse — wenigstens prinzipiell — erkennbar, nämlich erstens die der Inhomogenität des Feldes, zweitens die der „korrigierten Integrationsgrenze“. Die zahlenmäßige Auswertung für praktisch interessierende Fälle zeigt, daß die meistverwendete einfache Darstellung mittels  $\alpha$  für qualitative Betrachtungen ausreicht.

2. Mit ähnlichen Idealisierungen wie bei 1. wird das Verhältnis der Lawine der angeregten Zustände  $N^*$  zur Elektronenlawine  $N$  berechnet. Es zeigt sich, daß voraussichtlich für  $H_2$ , für hinreichend große Elektrodenradienverhältnisse  $r_a/r_i$ ,  $N^*$  praktisch proportional  $N$  gesetzt werden kann, was für die in [1] durchgeführten Betrachtungen der Absorption des Lawinenlichtes im Gas wichtig ist.



**Literatur.** [1] FETZ, H. u. G. MEDICUS: Z. angew. Phys. **1**, 19 (1948). — [2] MEDICUS, G.: Z. angew. Phys. **1**, 106 (1948). — [3] ENGEL, V. u. STEENBECK: Elektrische Gasentladung, 1. Aufl., Bd. II, S. 48, 1932. — [4] TOWNSEND, J. S.: Handbuch der Radiologie, Bd. I. — SEELIGER, R.: Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XIII, S. 3. — [5] COMPTON, K. T. and P. M. MORSE: Phys. Rev. **30**, 305 (1927).

[6] KRUTHOF, A. A. u. F. M. PENNING: Physica, Haag, **3**, 530 (1936); **4**, 445 (1937); **7**, 519 (1940). — [7] AYRES, T. L. R.: Phil. Mag. **45**, 353 (1923). — [8] FÜCKS, W. u. F. KETTEL: Z. Phys. **116**, 657 (1940). — [9] SCHÖFER, R.: Z. Phys. **110**, 21 (1938). — [10] ROGOWSKI, W.: Z. Phys. **114**, 1 (1939). — [11] LANDOLT-BÖRNSTEIN: Physikalische Tabellen, Erg.-Bd. IIIb, S. 869f.

## Über die Steuerung des Quecksilberniederdruckbogens.

Von ALBERT HAUG, München.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 28. Oktober 1948.)

### Einleitung.

Die durch die Raumladung begrenzte Ergiebigkeit des Hochvakuumrohres legte schon frühzeitig dessen Ersatz durch die fast raumladungsfreie Entladungsform des Bogens nahe, womit gleichzeitig das Problem einer dem Hochvakuumrohr entsprechenden Steuerung des Bogens auftrat. Durch die Arbeiten von FETZ [1], [2] ist die Möglichkeit einer derartigen Steuerung für den Quecksilberniederdruckbogen erwiesen. Ihre völlige Analogie zu der des Hochvakuumrohres zeigt sich aber erst an einer neuen Form des steuerbaren Bogens, die inzwischen von Höss [3] entdeckt wurde. Damit ergibt sich allerdings die zwingende Notwendigkeit, die früheren Erklärungsversuche, die an sich schon wenig befriedigend waren, zu verlassen. Es erschien deshalb angebracht, an Hand eigener Versuche die einschlägigen Arbeiten kritisch zu überprüfen, um so zu einer neuen Deutung der Steuervorgänge zu kommen.

### 1. Die Versuchsanordnung.

Für die Versuche fand ein U-förmig gebogenes Gefäß Verwendung (Abb. 1), das dauernd an der Pumpe lag. In der Mitte befand sich der Pumpstutzen  $P$ , unten der Quecksilberteich  $T$ , im einen Arme die Glühkathode  $K_g$ , im andern ein grobmaschiges Gitter als Hilfsanode  $A_h$ . Dieser Teil bildete den Hilfsbogen, der bei den Versuchen dauernd brannte. Dadurch wurde es ermöglicht, daß einerseits der Steuerraum von den Vorgängen an der Glühkathode (Kathodenfall) völlig unbeeinflusst blieb, andererseits die Plasmadichte im Steuerraum sich unabhängig von den Betriebsspannungen und Strömen, einfach durch Änderung des Hilfsbogenstroms, regeln ließ. Über der Hilfsanode war in einem Aufsatz das Steuergitter  $G$ , die Anode  $A$  und dazwischen eine Sonde  $S$  zur Messung der Trägerdichte untergebracht. Der Aufsatz war mit Apiezon auf einem Eisenring  $K$  aufgekittet, der gleichzeitig als Kathode des gesteuerten Bogens diente und mit der Hilfsanode kurzgeschlossen war. Dieser Eisenring war mittels Gummidichtung auf das U-Rohr aufgepreßt, ebenso wie der Preßteller, der die Glühkathode trug. Diese bestand aus einer nickelumspinnenen Wolframwendel, die nach Art einer Oxydkathode pastiert war, und gab Ströme von mehreren Ampère. Als Gitter fand stets ein Ni-Präzisionsgitter mit 10 Maschen/cm Verwendung, das auf einem Nickelring aufgeschweißt war, der dicht an der Glaswand anlag. Die zylindrische Molybdänsonde hatte bei einem Durchmesser von 0,6 mm und einer Länge von 2 mm eine Oberfläche von 3,77 mm<sup>2</sup>. Der Gitteranodenabstand betrug ebenso wie der

Gitterkathodenabstand 20 mm, der Durchmesser des Aufsatzes 44 mm, der Querschnitt der Entladung etwa 14 cm<sup>2</sup>. Das ganze Gefäß befand sich in einem

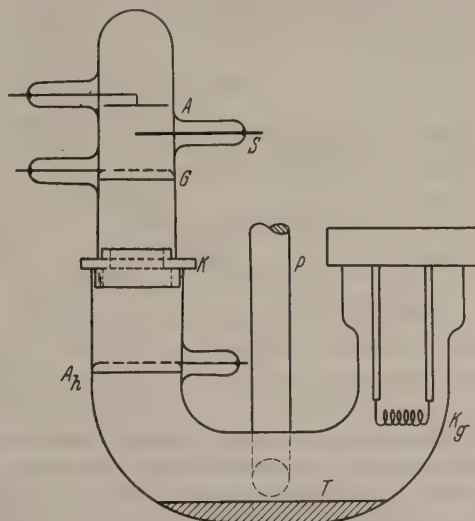


Abb. 1. Das Versuchsgefäß.

Thermostaten, dessen Temperatur  $T_b$  den Dampfdruck festlegt. Die Schaltung zeigt Abb. 2. Man sieht daraus, daß alle Spannungen gegen das Potential

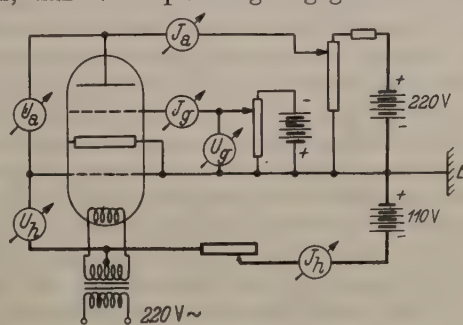


Abb. 2. Die Schaltung.

der Hilfsanode und des damit verbundenen Eisenringes (Steuercathode), das annähernd dem Potential des kathodischen Plasmas gleich ist, gemessen wurden.

### 2. Die Formen des steuerbaren Bogens.

Um von vorneherein eine Anzahl von Unklarheiten, die über die Steuerung des Hg-Bogens existieren, auszuschalten, ist es notwendig, die verwendeten Begriffe einerseits der Steuerung, andererseits des Bogens eindeutig festzulegen, da über sie keineswegs Einheitlichkeit besteht. Unter Steuerung soll hier genau wie beim Hochvakuumrohr einzig und



allein die Beeinflussung des Bogenstroms (Anodenstroms) durch das an eine im Plasma befindliche Elektrode (Gitter) angelegte Potential verstanden werden. Als Steuerkennlinien werden demnach immer die Charakteristiken  $J_a = f(U_g)_{U_a = \text{const}}$  (Abb. 3)

bezeichnet werden, wobei  $U$  die Spannung,  $J$  den Strom, der Index  $a$  die Anode und der Index  $g$  das Gitter bezeichnet. Unter diesen Begriff der Steuerung fällt also nicht die Veränderung des Zündmoments beim Hg-Gleichrichter mit Gitter, das man ebenfalls als Steuergitter zu bezeichnen pflegt. Denn hier bezieht sich ja das „Steuern“ auf einen Zustand, in dem überhaupt kein Strom fließt. Man würde ein derartiges Gitter deshalb besser als Zündgitter bezeichnen. Dagegen gehört zu einer Steuerung in unserem Sinne das Lösen des Bogens, das ja auch

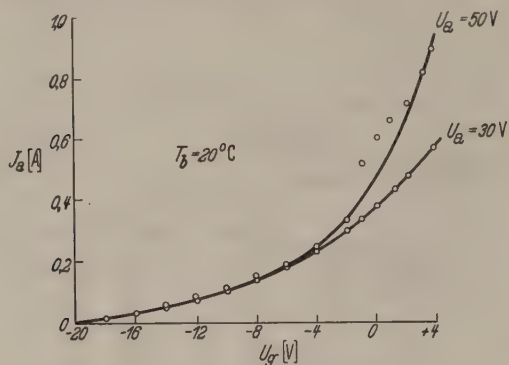


Abb. 3. Steuercharakteristik:  $J_a = f(U_g)_{U_a = \text{const.}}$

beim Hochvakuumrohr seine Analogie hat. Denn hier wie dort läßt sich durch eine genügend hohe negative Vorspannung der Anodenstrom völlig unterbinden.

Die beeinflussende Elektrode soll sich ausdrücklich im Plasma befinden, d. h. in dem Teile der Entladung, der durch seine Quasineutralität und seine niedere konstante Längsfeldstärke gekennzeichnet ist. Dieses Plasma dient uns auch zur Definition des Bogens. Wir verwenden dazu ausdrücklich nicht die Begriffe der selbständigen und unselbständigen Entladung, da man strenggenommen auch einen Bogen mit Glühkathode, der — genügende Ergiebigkeit der Kathode vorausgesetzt — einem solchen mit Brennfleck völlig gleichwertig ist, der letzteren Kategorie zuzählen müßte. Der Bogen sei vielmehr gekennzeichnet durch das Plasma, das, abgesehen vom Kathoden- und einem eventuell vorhandenen Anodenfall, den ganzen Entladungsraum ausfüllt, und durch die niedere Anodenspannung (Brennspannung, bei Hg  $\approx 10$ – $20$  V), die ihn gegen die Glimentladung abgrenzt. Dabei macht es natürlich nichts aus, daß infolge der Steuerung sowohl die Anodenspannung wesentlich erhöht wird als auch in der nächsten Umgebung des Gitters von einem Plasma keine Rede mehr sein kann. Wesentlich ist nur, daß ursprünglich, d. h. ohne Steuerung, bzw. bei geeignetem, genügend positivem Gitterpotential die obigen Bedingungen erfüllt sind und daß auch im gesteuerten Zustand sowohl auf der kathodischen wie auf der anodischen Seite des Gitters ein Plasma erhalten bleibt. (Bei unserer Versuchsanordnung fällt für den Bogen im Stellerraum der Kathodenfall weg; für die hier definierte „natürliche“ Brennspannung wäre also der Hilfsbogen hinzuzunehmen.)

Sind somit die hier verwendeten Begriffe der Steuerung und des Bogens genügend erklärt, so ergibt sich eine weitere Einschränkung für den „steuerbaren Bogen“. Darunter verstehen wir einen Bogen im vorhergehenden Sinne, bei dem eine Steuerung überhaupt möglich ist. Da auch beim Bogen die Elektronen infolge ihrer weit größeren Beweglichkeit im wesentlichen die Träger des Stromes sind, ist es notwendig auch hier mit negativen Gittervorspannungen zu arbeiten, um eine möglichst leistungslose Steuerung zu erzielen. Bereits LANGMUIR hat jedoch gezeigt, daß sich jede Elektrode im Plasma, die gegenüber diesem ein negatives Potential hat, infolge des Ioneneinstroms mit einer positiven Raumladungsschicht umgibt, die die Wirkung des negativen Potentials gegenüber dem Plasma abschirmt. Damit schien zunächst eine eigentliche Bogensteuerung unmöglich. Nur beim Wandstromverstärker [4] fand der Bogen Verwendung, allerdings im wesentlichen nur als Elektronenquelle. Denn im eigentlichen Stellerraum (Gitter-Anoden-Raum) befand sich ja gar kein Plasma; hier wurde im Gegenteil jede Ionisation peinlich vermieden. Man mußte ja nach der LANGMUIRSCHEN Erkenntnis irgendwie dafür sorgen, daß die Dicke der Ionenschichten, in der die steuernde Wirkung des Gitterpotentials noch bestand, mindestens so groß wie die halbe Öffnungsbreite der Gitterlöcher war, damit die Elektronen nicht unbeeinflusst durch die Gitterlöcher hindurch konnten. Dazu war es notwendig, die Ionendichte möglichst zu verringern. Deshalb wurde das Gitter in den trägerarmen Randzonen der Entladung angebracht und außerdem der Gitteranodenabstand so klein gehalten, daß eine merkliche Stoßionisation nicht möglich war. Beim Wandstromverstärker handelt es sich also wohl um eine echte Steuerung; als Bogensteuerung kann man sie jedoch kaum bezeichnen, da ja nur kathodischerseits ein Plasma vorhanden ist. Die Möglichkeit einer wirklichen Bogensteuerung, bei der zu beiden Seiten des Gitters ein Plasma besteht, hat zuerst FETZ [1], [2] nachgewiesen. Sie stellt sich nach seinen Arbeiten folgendermaßen dar: Mit negativer werdender Gitterspannung steigt die Brennspannung (bei konstantem Strom) und ebenso auch der Anodenstrom (bei konstanter Brennspannung). In den Begriffen der Röhrentechnik läßt sich letztere Tatsache auch folgendermaßen ausdrücken: Die Steilheit ist — im Gegensatz zum Hochvakuumrohr — negativ (SCHÖLS [5]). Weiter entstehen um die Gitterdrähte reine Ionenschichten („LANGMUIR-Schichten“), die ein Ausbreitungshindernis für die Elektronen darstellen, und zwischen diesen eine „Doppelschicht“, in der die gesamte Brennspannungserhöhung abfällt. Die Verengung des freien Gitterquerschnitts durch diese „LANGMUIR-Schichten“ bildet nun die Grundlage für eine Erklärung der Steuerung. Sie reguliert den Elektronenstrom durch das Gitter. Die Beschleunigung der Elektronen in der „Doppelschicht“ und die damit verbundenen Effekte (Ionisation, Erhöhung der anodischen Trägerdichte) gewährleisten die Stabilität des Vorgangs.

Tatsächlich läßt sich mit der Querschnittsverengung wohl die Brennspannungserhöhung deuten, nicht jedoch die negative Steilheit. Das folgende wird ergeben, daß die Querschnittsverengung an sich nur als Näherung für hohe Trägerdichten eines



allgemeineren Tatbestandes angesprochen werden kann und daß gerade bei der Bogenform, mit der FETZ gearbeitet hat, ihre Folgerungen völlig überdeckt werden von jenen anderen Effekten, die auf die Beschleunigung der Elektronen in der „Doppelschicht“ zurückzuführen sind. Für diese Bogenform war kennzeichnend, daß die Strom-Spannungs-Kennlinien  $U_a = f(J_a)_{U_g = \text{const}}$  beim gesteuerten Bogen (genau wie beim Bogen ohne Gitter) stets negativen Charakter aufwiesen. Hierin unterscheidet sich eine weitere Bogenform, auf die zuerst HÖSS [3] und BULLINGER [6] hingewiesen haben, bei der diese Kennlinien positiv sind. Ebenso ist hier auch die Steilheit positiv. Die Verhältnisse ähneln somit stark denen beim Hochvakuumrohr. Andererseits fällt auch bei dieser Bogenform die gesamte Brennspannungserhöhung in einer mehr oder minder schmalen Schicht auf der anodischen Seite des Gitters ab, die sich als Dunkelraum deutlich abhebt und Dicken von einigen Millimetern, ja unter Umständen sogar Zentimetern erreicht. Besonders wichtig erscheint jedoch, daß unter günstigen Umständen ein völlig kontinuierlicher Übergang zwischen dem Bogen mit positiver und dem mit negativer Charakteristik hergestellt werden kann (Abb. 4). Die Bedingungen, die die einzelnen Parameter (geometrische Konfiguration und Betriebsdaten) erfüllen müssen, damit sich die eine oder andere Bogenform einstellt, enthält die genannte Arbeit von HÖSS [3]. Hier sei nur erwähnt, daß sich der Bogen mit negativer Charakteristik gewöhnlich bei höheren Dampfdrücken (Badtemperatur) und bei höherer Stromdichte einstellt, d. h. also bei höherer Trägerdichte, wenn man die übrigen Parameter, insbesondere die geometrische Konfiguration konstant läßt. Somit ergibt sich eine — in erster Linie mit der Trägerdichte — fortschreitende Reihe der steuerbaren Entladungsformen: Hochvakuumrohr — Wandstromverstärker — Bogen mit positiver — Bogen mit negativer Charakteristik, die es gestattet, den Steuermechanismus einem einheitlichen Prinzip einzuordnen. Darauf soll im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.

Zuvor ist es noch notwendig, auf die Grenzen hinzuweisen, die der Steuerung des Bogens überhaupt gesetzt sind. Bei weiterer Erhöhung des Dampfdruckes, d. h. also wieder der Trägerdichte, bekommt man Einschnürungsvorgänge, die ebenfalls FETZ [1] beschrieben hat. Eine Steuerung ist dann nicht mehr möglich. Das gleiche gilt für einen Sprung in der negativen Stromspannungscharakteristik, wie er bei HÖSS [3] auftritt, und zwar ebenfalls bei hohen Stromdichten. Ohne auf diese Erscheinungen näher einzugehen, kann bei Betrachtung des gesamten Materials festgestellt werden, daß bisher noch keine höheren Stromdichten als  $0,3 \text{ A/cm}^2$  gesteuert werden konnten, ganz gleich, durch welche Erscheinungen der Steuerbereich abgeschlossen wurde. Somit erscheint das Gebiet des steuerbaren Bogens auf Dampfdrucke von  $10^{-4}$  bis  $10^{-1}$  Torr beschränkt. Hochdruckentladungen und frei brennende Bögen scheiden damit von selbst aus. Dagegen ist die Steuerung keineswegs nur bei Quecksilberdampf möglich, sondern genau so auch bei anderen Gasen, insbesondere bei Edelgasen, wie eine Arbeit von LEIMBERGER [7] beweist.

### 3. Die physikalischen Ursachen der Steuervorgänge.

Den Ausgangspunkt für alle bisherigen Erklärungen der Gittersteuerung bildete die Sonde. Man betrachtete das Gitter genau so wie die Sonde als eine Elektrode, die sich beim Anlegen einer negativen Spannung mit einer positiven Raumladungsschicht, der sog. LANGMUIR-Schicht, umgibt. Während aber als erste Bedingung für die Sonde gilt, daß sie das Plasma möglichst wenig stören soll und so die Kenngrößen des ungestörten Plasmas zu messen gestattet, soll ja das Gitter, bzw. das an es angelegte Potential, den Bogen möglichst stark beeinflussen. Schon aus diesem Grunde muß der Vergleich des Gitters mit einer Sonde als unzulässig erachtet werden. Außerdem wird das folgende ergeben, daß bei der Gittersteuerung keineswegs die LANGMUIR-Schichten das Maßgebende sind, wenn man darunter eine Schicht positiver Raumladung versteht, die alle auftreffenden

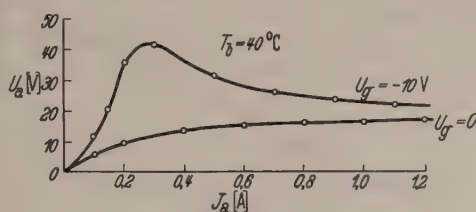


Abb. 4. Übergang von der positiven zur negativen Strom-Spannungs-Charakteristik:  $U_a = f(J_a)_{U_g = \text{const.}}$

Elektronen reflektiert. Man darf dann diese Schicht aber nicht gleichsetzen mit der, in der die gesamte Gitterspannung abfällt. Das ist schon bei der Sonde nur eine rohe Näherung (WENZL [8]); noch weniger gilt es beim Gitter. Vielmehr ist hier der Vorgang doch folgender: Sowohl zwischen Gitter und Kathode, wie zwischen Gitter und Anode befindet sich je ein Plasma, die beide einen beträchtlichen Spannungsunterschied aufweisen. Diese Spannung fällt in einer mehr oder minder dünnen Schicht in der Gitterebene ab [1], [3]. Dadurch werden Elektronen vom kathodischen Plasma zur Anode und Ionen vom anodischen zur Kathode beschleunigt. Einen Teil dieser Elektronen und Ionen wird das Gitter absorbieren, so daß der Gitterstrom je nach den Dichte- und Potentialverhältnissen sowohl ein Elektronen- als auch ein Ionenstrom sein kann, und zwar stellt sich ersterer bevorzugt — aber keineswegs ausschließlich — beim Bogen mit positiver, letzterer dagegen beim Bogen mit negativer Charakteristik ein. Für die Steuerung ist aber nicht dieser Gitterstrom wesentlich [5], sondern die Verhältnisse in der Schicht, in der die Brennspannungserhöhung abfällt. Beim Bogen mit positiver Charakteristik erscheint diese Schicht als breiter Dunkelraum, der sich über den ganzen Entladungsquerschnitt ausbreitet. Da wir es hier aber meist mit einem Elektronen-, nicht Ionenstrom, zu tun haben, läßt sich dieser Dunkelraum keineswegs wie bei der Sonde erklären. Erhöht man nun die Trägerdichte, so daß die positive in die negative Charakteristik übergeht, so wird dieser Dunkelraum immer schmaler, bis er schließlich höchstens noch — bei geeigneten, rostartigen Gittern — direkt um die Gitterdrähte erkennbar ist („LANGMUIR-Schicht“), während sonst zwei Plasmen verschiedener Helligkeit aneinanderzugrenzen scheinen. Diese Helligkeitsgrenze („Doppelschicht“) und die



„LANGMUIR-Schicht“ lassen sich somit kontinuierlich aus dem Dunkelraum herstellen. Wir werden deshalb einheitlich für die Schicht, die sich zwischen dem kathodischen Plasma (k. Pl.) und dem anodischen (a. Pl.) ausbreitet und in der die gesamte Brennspannungserhöhung abfällt, den Namen „Gitterschicht“ (G. Sch.) einführen und uns zunächst mit den Eigenschaften dieser G. Sch., die offenbar für die Steuerung verantwortlich ist, befassen.

Die G. Sch. zeichnet sich durch ihr gegenüber dem Plasma wesentlich verändertes Potentialfeld aus. In diesem Potentialfelde, das maßgebend durch die Gitterspannung beeinflusst wird, ist genau wie beim Hochvakuumrohr der Grund der Steuereffekte zu suchen. Um ein Bild von ihm zu gewinnen, wird man mit guter Näherung die bekannten Potential-

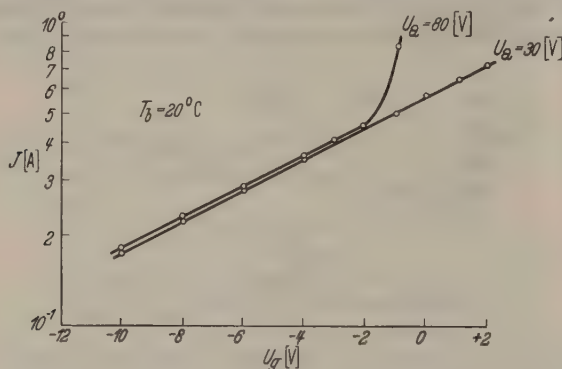


Abb. 5. „Anlaufstrom“:  $J = J_a + J_g = f(U_g)$   $U_a = \text{const.}$

bilder bei GLASER-HENNEBERG [9] oder ROTHE-KLEEN [10] benutzen dürfen. Nur muß man sich diese auf den kleinen Raum der G. Sch. zusammengedrängt denken, in der ja der ganze Potentialunterschied zwischen a. Pl. und k. Pl. abfällt. Diese Potentialbilder erscheinen hier um so mehr angebracht, als sich die G. Sch. gegenüber dem Plasma als Dunkelraum abhebt, so daß in ihr keine bedeutende Stoßionisation stattfinden kann. Zudem läßt sich zeigen [11], daß für sie — als Ganzes — die von LANGMUIR [12] entwickelten Formeln der Doppelschicht Gültigkeit haben, die sich von der Raumladungsgleichung nur unwesentlich unterscheiden. Auf Grund dieser Auffassung dürfen wir dann dem Gitter ein Effektivpotential zuschreiben, das allerdings nicht so einfach wie beim Hochvakuumrohr aus dem Durchgriff errechnet werden kann, da ja der Durchgriff beim Hg-Bogen keineswegs eine Konstante ist, die aus den geometrischen Daten folgt, sondern sehr wesentlich von den Betriebsbedingungen abhängt [5]. Jedoch wird auch hier ein solches Effektivpotential primär (d. h. soweit nicht andere Effekte hinzukommen) dafür maßgebend sein, welcher Strom die Gitterebene passieren kann. Gegenüber der Querschnittsverengung sprechen nun für diese Ansicht besonders folgende Ergebnisse: 1. Befindet sich zwischen Gitter und Gefäßwand ein wenn auch nur geringer Abstand ( $\approx 1 \text{ mm}$ ), so brennt der Bogen durch diese Lücke und kann nicht mehr gesteuert werden. Dasselbe kann vorkommen, wenn bei dem verwendeten Gitter ein Loch wesentlich größer als die anderen ist. Hierher gehören auch die Einschnürungsvorgänge [1]. Dadurch, daß sich der Bogen auf einen kleinen Querschnitt konzentriert, ent-

steht hier eine wesentlich höhere Ionendichte, die die Wirkung der Gitterspannung in so dünnen Schichten abschirmt, daß in den Gitterlöchern ein freier Weg für den Bogen entsteht. Dieser genügt ihm jedoch zum ungestörten Brennen. 2. Bekanntlich hat die Steuerung eine Erhöhung der Brennspannung zur Folge. Wäre nun die Querschnittsverengung verantwortlich für die Steuerung und damit für die Brennspannungserhöhung, so müßte es vollständig gleichgültig sein, wie diese zustande kommt. Eine Lochblende und ein Drahtgitter, die beide den gleichen freien Querschnitt haben (beide unter Einrechnung der LANGMUIR-Schichten), müßten genau die gleiche Brennspannungserhöhung ergeben. In Wirklichkeit beträgt sie bei ersterer nur einige Volt, bei letzterer ist sie mindestens um eine Zehnerpotenz höher. Betrachtet man die Potentialbilder, die beide ergeben, so wird einem das völlig klar. Die Störung, die eine Lochblende hervorruft, erstreckt sich nur auf die trägerarmen Randzonen des Plasmas, beim Gitter dagegen über den ganzen Rohrquerschnitt. Deshalb ist auch nur beim Gitter eine Steuerung möglich, bei der Lochblende nicht [1]. Diese beiden Punkte gelten in gleicher Weise für den Bogen mit negativer und den mit positiver Charakteristik. Für letzteren kommt noch hinzu: 3. Mißt man den Gesamtstrom (Anoden- plus Gitterstrom) in Abhängigkeit von der Gitterspannung bei genügend negativen Gitterspannungen, so ergibt sich ein reiner Anlaufstrom, der einem Exponentialgesetz folgt. Die entsprechende halblogarithmische Darstellung ergibt eine Gerade (Abb. 5). Wären die LANGMUIR-Schichten maßgebend, so müßte der Strom durch die Querschnittsverengung nach dem Raumladungsgesetz gegeben sein, was eine ganz andere Gesetzmäßigkeit ergeben würde, vor allem auch eine erhebliche Abhängigkeit von der Anodenpannung, die in Wirklichkeit, wie Abb. 5 zeigt, fast ohne Einfluß ist. 4. Hat man eine Anordnung mit Hilfsbogen, so kann man mit der negativen Gitterspannung beliebig hoch gehen, ohne daß der Anodenstrom völlig verschwindet. So floß z. B. bei  $U_g = -100 \text{ V}$  immer noch ein Reststrom von 2 mA, obwohl bei derartigen Gitterspannungen die Gitterlöcher schon längst durch LANGMUIR-Schichten geschlossen und für die Elektronen unpassierbar sein müßten. (Bei dem gleichen Bogen genügten Gitterspannungen von 0 bis  $-10 \text{ V}$  um bedeutende Steuereffekte zu erzielen.) Mittels des Effektivpotentials ist dieser Reststrom leicht erklärlich, da immer noch einige Elektronen existieren, die auch gegen ein sehr hohes Potential anlaufen können. 5. Eine Steuerung ist sowohl bei negativem wie bei positivem Gitterpotential möglich. (Hier sei nochmals darauf hingewiesen, daß sich alle Potentialangaben dieser Arbeit, sofern nichts anderes angegeben, auf das Potential der Steuerkathode beziehen, das in erster Näherung dem des k. Pl. gleich ist.) Bei positivem Gitterpotential findet aber keinerlei Querschnittsverengung statt. Die Steuerung beruht dann wie beim Hochvakuumrohr auf der Stromverteilung zwischen Gitter und Anode.

Die Einbringung eines Gitters mit einem negativen Potential hat also primär dieselben Folgen wie beim Hochvakuumrohr. Wir können ihm ein Effektivpotential zuschreiben, demzufolge mehr oder weniger Elektronen die Gitterebene passieren können.



Dadurch ändert sich der Spannungsabfall am Außenwiderstand und damit die Brennspannung. Ein wesentlicher Unterschied ist jedoch die Zusammenhängung des gesamten Potentialfeldes auf die G. Sch. Diese wird um so dünner sein, je höher die Trägerdichte ist. Denn dann stehen um so mehr Ionen zur Abschirmung des negativen Gitterpotentials zur Verfügung, wodurch dessen Wirkung auf um so kleinere Bereiche eingedämmt wird. Um also den gleichen Steuereffekt, d. h. die gleiche Stromänderung zu erzielen, muß die Gitterspannung um so negativer sein. Außerdem läßt sich die Steuerwirkung durch engmaschigere Gitter verbessern, da dann das Gitterpotential die gesamte Gitterebene um so stärker beeinflusst und das Effektivpotential um so negativer wird. Denn obwohl dieses nicht unmittelbar aus den Betriebsspannungen und den geometrischen Daten gewonnen werden kann, kann man doch zu einer anschaulichen Vorstellung von ihm auf folgende Weise gelangen: Von den Gitterdrähten fällt das negative Gitterpotential nach allen Seiten ab. Man kann nun als Effektivpotential einfach den Mittelwert des Potentials über den Gitterquerschnitt betrachten. Dieser wird um so höher (negativer) sein, je engmaschiger das Gitter ist und je flacher die einzelnen Spannungsabfälle sind. Deren Steilheit nimmt jedoch mit wachsender Trägerdichte zu. Somit läßt sich die Erklärung der Steuerung durch die Querschnittsverengung [1], [2] als Näherung für sehr hohe Trägerdichten ansprechen, da ja hier die Spannungsabfälle sehr steil und im wesentlichen auf die nächste Umgebung der Gitterdrähte beschränkt sind.

Maßgebend für die Trägerdichte ist nun in erster Linie der Anodenstrom und der Dampfdruck (Badtemperatur) (Abb. 6a). Da jedoch die in der G. Sch. beschleunigten Elektronen („schnelle Elektronen“) unter Umständen im Anodenraum eine starke zusätzliche Ionisation hervorrufen und deren Höhe von der Beschleunigungsspannung und damit von der Brennspannung abhängt, kann auch diese als Parameter in die Trägerdichte eingehen. In unserem Falle war diese Abhängigkeit vernachlässigbar (Abb. 6b) und dies zeigt sich allgemein bei der positiven Charakteristik. Dann sind außer der Beeinflussung des Gitterfeldes, erfaßt durch das Effektivpotential, keine weiteren Effekte für die Steuerung maßgebend. Dies bildet auch sowohl für die Brennspannungserhöhung, wie für die positive Steilheit (genau wie beim Hochvakuumrohr) eine vollständige Erklärung.

Bei der negativen Charakteristik beobachtet man dagegen eine starke Erhöhung der anodischen Trägerdichte [1]. Dazu ist notwendig, daß die freie Weglänge der schnellen Elektronen klein gegenüber dem Gitteranodenabstand ist. Dabei muß dieser selbst wiederum klein gegenüber dem Rohrdurchmesser bleiben, damit die erhöhte Ionisation nicht durch Wandeffekte kompensiert wird. Denn die zusätzliche Ionisation tritt erst in Erscheinung, wenn die neugebildeten Träger nicht mehr durch die Wanddiffusion abgeführt werden können und dies ist somit das eigentliche Kriterium für das Auftreten der positiven oder negativen Charakteristik. Sehr schöne Versuche, bei denen der Übergang von der positiven in die negative Charakteristik durch Vergrößerung des Gitteranodenabstands hervorgerufen wird, hat Höss [3] beschrieben. Für die Steuerung gilt nun hier fol-

gendes: Primär würde auch hier ein negatives Gitter eine Stromdrosselung bewirken, genau wie beim Bogen mit positiver Charakteristik. Am einfachsten zeigt sich dies, wenn man betrachtet wie  $J_a$  auf eine Änderung von  $U_g$  allein reagiert. Bei den üblichen Kennlinien  $J_a = f(U_g)_{U_a = \text{const}}$  wird ja nicht nur  $U_g$  von außen verändert, sondern außerdem zur Konstanthaltung von  $U_a$  auch der Außenwiderstand  $R_a$ . Läßt man nun  $R_a$  (statt  $U_a$ ) konstant, so bekommt man das unmittelbare Verhalten von  $J_a$  bei einer Änderung von  $U_g$ . Derartige Kennlinien  $J_a = f(U_g)_{R_a = \text{const}}$  lassen sich aus Kennlinien  $U_a = f(U_g)_{R_a = \text{const}}$ , wie sie die Arbeiten von FETZ [1] und Höss [3] enthalten, leicht rekonstruieren. Nach diesen nimmt  $U_a$  zu,

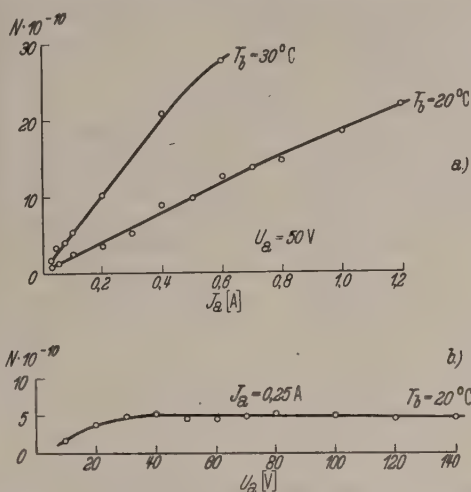


Abb. 6 a u. b. Abhängigkeit der Trägerdichte, a vom Anodenstrom, b von der Anodenspannung.

wenn  $U_g$  negativer wird, ähnlich wie bei den üblichen Kennlinien  $U_a = f(U_g)_{J_a = \text{const}}$ . Zuzufolge der Gleichung  $E = U_a + J_a R_a = \text{const}$  ( $E$  = Betriebsspannung) muß somit  $J_a$  bei konstantem  $R_a$  abnehmen. Zu demselben Ergebnis kommt man auch auf folgende Art: Bedenkt man, daß  $J_a$  (bei konstantem Druck) nur eine Funktion von  $U_a$  und  $U_g$  ist [5], so folgt:

$$dJ_a = \left( \frac{\partial J_a}{\partial U_g} \right)_{U_a} dU_g + \left( \frac{\partial J_a}{\partial U_a} \right)_{U_g} dU_a$$

oder, da zufolge der oben benützten Gleichung

$$\begin{aligned} dU_a &= -R_a dJ_a \\ \left( \frac{dJ_a}{dU_g} \right)_{R_a} &= \frac{SR_i}{R_a + R_i}, \end{aligned}$$

wenn man die in der Röhrentechnik üblichen Abkürzungen

$$\left( \frac{\partial U_a}{\partial J_a} \right)_{U_g} = R_i \quad (\text{innerer Widerstand})$$

$$\left( \frac{\partial J_a}{\partial U_g} \right)_{U_a} = S \quad (\text{Steilheit}) \quad \text{einführt.}$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung ist nun stets positiv, da erstens die Stabilitätsbedingung  $R_a + R_i > 0$  erfüllt sein muß und zweitens das Produkt  $SR_i > 0$  ist, da bei der positiven Charakteristik beide Faktoren positiv, bei der negativen beide negativ sind. Somit hat also  $(dJ_a/dU_g)_{R_a}$  bei beiden Bogenformen dasselbe Vorzeichen, und zwar nimmt  $J_a$  mit  $U_g$  ab.



Primär ist also die Wirkung der negativen Gitterspannung auf den Strom dieselbe.

Die gleichzeitige Beschleunigung der Elektronen in der G. Sch. ruft aber Effekte sekundärer Natur hervor, die bei der negativen Charakteristik nicht mehr vernachlässigbar sind, sondern diese primäre Wirkung völlig überdecken. Zunächst ist dies die zusätzliche Ionisation, die zu einer erheblichen Erhöhung der anodischen Trägerdichte führt. Dadurch wird einerseits — wie bei jeder Erhöhung der Trägerdichte — der Einfluß der negativen Gitterspannung vermindert, andererseits tritt eine verstärkte Ionenwanderung in den Kathodenraum auf. Diese Ionen hinwiederum ermöglichen infolge der Forderung der Quasineutralität einen erhöhten Elektronenstrom im

mentellen Ergebnissen in den bisherigen Arbeiten [1], [3].

Überblickt man die gesamte Steuerung, so erkennt man, daß es am einfachsten ist, wenn man vom Hochvakuumrohr ausgeht und dann über den Wandstromverstärker zum Bogen kommt. Da, wie wir gesehen haben, das Steuerungsprinzip wenigstens primär dasselbe ist, ist das ohne Zweifel zulässig. Wir betrachten eine Versuchsanordnung, bei der dauernd ein Hilfsbogen brennt, wodurch auch stets ein k. Pl. vorhanden ist. Das Gitter habe gegenüber diesem eine geringe negative Vorspannung. Beim Hochvakuumrohr müssen wir dem Potential dieses k. Pl. das der Glühkathode gleichsetzen. Bei ihm nimmt die Spannung sowohl zur Anode wie zur Kathode

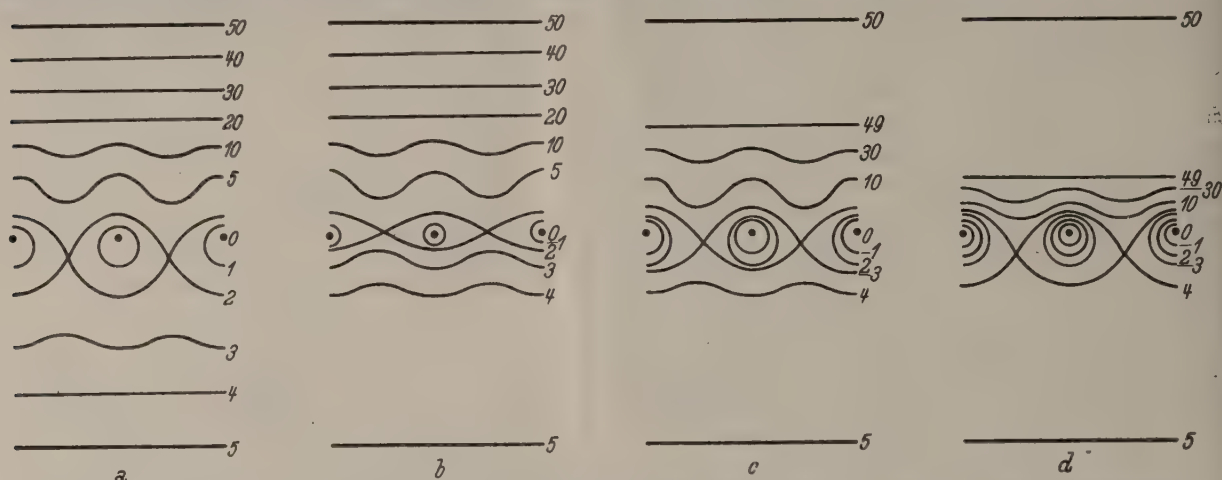


Abb. 7 a—d. Potentialbilder zur Gittersteuerung: a Hochvakuumrohr; b Wandstromverstärker; c Bogen mit positiver Charakteristik; d Bogen mit negativer Charakteristik.

Kathodenraum und damit natürlich überhaupt eine Erhöhung des Stroms. Dieser Vorgang wird sich solange aufschaukeln, bis sich wieder ein Gleichgewichtszustand zwischen den einzelnen Parametern eingestellt hat, insbesondere zwischen dem durch den Strom bedingten Spannungsabfall am Außenwiderstand und der die Beschleunigung und damit Ionisation bewirkenden erhöhten Brennspannung. Damit wird es zumindest qualitativ verständlich, daß sich beim Bogen mit negativer Charakteristik zwar die Brennspannung so wie bei dem mit positiver verhält, der Strom dagegen gerade umgekehrt (negative Steilheit!), wenn wir uns nun wieder den üblichen Kennlinien bei konstantem  $J_a$  bzw.  $U_a$  zuwenden. Denn je negativer das Gitter, um so höher die Brennspannung, um so höher aber auch die Ionisation und alle damit zusammenhängenden Effekte, die zur Erhöhung des Stromes führen. Daß dabei das Maximum der Ionisierungsfunktion eine Rolle spielt und der Erhöhung der Brennspannung eine gewisse Grenze setzt, worauf FETZ [1], [2] besonders hingewiesen hat, ist unverkennbar; nur ist diese Grenze nicht durch dieses Maximum allein bestimmt, da nicht die Ionisierung an sich, sondern ihr Verhältnis zur Wanddiffusion und anderen Parametern maßgebend ist. Da aber auch hier primär doch wieder das Gitterfeld für die Steuerung bestimmend ist, gilt alles bezüglich der Wirkung der Gittermaschenweite, Trägerdichte und des Gitterpotentials Gesagte unverändert auch für den Bogen mit negativer Charakteristik. Alle diese Ansichten decken sich vollständig mit den experi-

vom Gitter aus kontinuierlich zu (Abb. 7a). Beim Wandstromverstärker dagegen haben wir kathodischerseits ein Plasma; der Spannungsabfall ist auf eine schmale Schicht am Gitter zusammengedrängt. Zwischen Gitter und Anode hat sich dagegen noch nichts Wesentliches geändert. Hier folgt das Potential immer noch sehr angenähert dem Raumladungsgesetz (Abb. 7b). Gehen wir nun zum Bogen (mit positiver oder negativer Charakteristik) über, so entsteht auch ein a. Pl. (seine Ausbildung kann je nach den Verhältnissen stetig oder unstetig erfolgen). Auch hier wird nun das Potentialgefälle auf eine dünne Schicht am Gitter zusammengedrängt. Infolge des höheren Potentials der Anode, bzw. des a. Pl. wird jedoch diese Schicht immer erheblich dicker sein als auf der kathodischen Seite [11]. Beim Bogen mit negativer Charakteristik tritt eine weitere Verdünnung der Schicht gegenüber dem mit positiver durch die wesentlich höhere Trägerdichte auf (Abb. 7c und 7d). Zu den Abb. 7a—d ist zu bemerken: Die Potentialbilder entstammen natürlich keiner Messung, sondern sollen nur einen qualitativen Überblick geben. Dabei ist das Gitterpotential der Einfachheit halber gleich Null gesetzt. Die Schichtdicken sind zur Verdeutlichung gegenüber der Wirklichkeit stark vergrößert.

Geht man umgekehrt vom Plasma aus und betrachtet die Störung, die ein eingebrachtes Gitter hervorruft, so ergibt sich folgendes Bild: Durch das Gitter wird dem Plasma ein fremdes Potential aufgeprägt und dadurch seine Quasineutralität gestört und der



nodenstrom gedrosselt. Dann baut sich zur Wiederherstellung des Strömungsgleichgewichts eine Schicht erhöhter Feldstärke auf, die die gesamte Brennspannungserhöhung aufnimmt. Da nun starke Ladungen gleicherlei Vorzeichens stets dem Zustand der Quasineutralität zustreben, ist diese Schicht auf einen kleinen Raum beschränkt. Die so entstehenden entwickelten Potentialverhältnisse in der Gitterebene (Abb. 7) schematisieren wir durch die Einführung eines Effektivpotentials, das den Elektronenstrom vom k. Pl. unmittelbar (bei der positiven Charakteristik) oder mittelbar (bei der negativen Charakteristik) regelt.

Zum Schluß sei noch kurz auf das Löschen eingegangen. Man hat dabei zu unterscheiden zwischen einer Anordnung mit Hilfsbogen und einer ohne Hilfsbogen. Im ersteren Falle läßt sich, wie schon erwähnt, bei positiver Charakteristik durch keine noch so hohe negative Gitterspannung der Anodenstrom völlig unterdrücken. Oder anders ausgedrückt: Der Bogen kann durch das Gitterpotential nicht völlig gelöscht werden. Bei negativer Charakteristik ist dagegen ein Löschen wohl möglich als Folge der Instabilität des Gesamtkreises, wenn nämlich die Summe aus positivem Außen- und negativem Rohrwiderstand verschwindet [1], [2]. Diese Art des Löschens kann natürlich ebenso bei Betrieb ohne Hilfsbogen auftreten. Die Höhe der erzielbaren Brennspannung hängt dabei nicht allein vom Maximum der Ionisierungsfunktion ab, sondern genau so von der Wanddiffusion und vom Außenwiderstand. Sie ist somit auch nicht durch ersteres begrenzt. Dies beweisen auch Messungen von Höss [3]. Bei Betrieb ohne Hilfsbogen kann nun das Löschen auch noch auf die Weise erfolgen, daß das Gittereffektivpotential so negativ wird, daß es zur Aufrechterhaltung des Bogens im Kathodengitterraum nicht mehr ausreicht.

#### *Zusammenfassung.*

Die vorliegende Arbeit unterzieht die bisherigen Ergebnisse über die Steuerung des Hg-Niederdruckbogens einer kritischen Würdigung und versucht an

Hand eigener Versuche eine neue Deutung der Steuerungsvorgänge.

Durch den gesteuerten Bogen mit positiver Strom-Spannungs-Charakteristik läßt sich ein kontinuierlicher Übergang: Hochvakuumrohr — Wandstromverstärker — Bogen mit positiver — Bogen mit negativer Charakteristik herstellen.

Dementsprechend wurde als einheitliches Steuerungsprinzip die Veränderung des Gitterfeldes durch das an das Gitter angelegte Potential festgestellt und dem Gitter ein Effektivpotential zugeschrieben.

Beim Bogen mit positiver Charakteristik lassen sich mit dieser Auffassung alle Steuereffekte: Die Änderung des Anodenstroms und der Brennspannung, das Auftreten der Gitterschicht und der starke Spannungsabfall in ihr, sowie das Löschen zwanglos erklären.

Beim Bogen mit negativer Charakteristik kommt dazu die zusätzliche Ionisation der in der Gitterschicht beschleunigten Elektronen. Dann wird auch hier die gegenüber dem vorherigen Fall entgegengesetzte gerichtete Änderung des Anodenstroms (negative Steilheit) verständlich.

Die vorliegende Arbeit stellt im wesentlichen einen Ausschnitt aus der Dissertation des Verfassers dar, die in den Jahren 1943—1945 im Elektrophysikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule München durchgeführt wurde. Ihre Veröffentlichung verzögerte sich aus zeitbedingten Gründen. Herrn Prof. Dr. W. O. SCHUMANN möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine dauernde Unterstützung auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

**Literatur.** [1] FETZ, H.: Ann. Phys. **37**, 1 (1940). — [2] FETZ, H.: Arch. Elektrotechn. **36**, 378 (1942). — [3] HÖSS, E.: Diss. T. H. München 1946. — [4] LÜBCKE, E. u. W. SCHOTTKY: Wiss. Veröff. Siemens-Werk **9**, 390 (1930). — [5] SCHÖLS, G.: Ann. Phys., **42**, 477 (1943). — [6] BÜLLINGER, T.: Diss. T. H. München 1943. — [7] LEIMBERGER, E.: Z. Phys. **117**, 621 (1941). — [8] WENZL, F.: Erscheint demnächst. — [9] GLASER, A. u. W. HENNEBERG: Z. techn. Phys. **16**, 222 (1935). — [10] ROTHE-KLEEN: Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren, Kap. 8 u. 9. Leipzig 1940. — [11] HAUG, A.: Z. angew. Phys. (im Erscheinen). — [12] LANGMUIR, J.: Phys. Rev. **33**, 954 (1929).

## Ein einfacher Zählrohrverstärker.

Von HANS GOLDSTEIN.

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt a. M.)

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 9. November 1948.)

Zur Messung der Radioaktivität mit dem Zählrohr bei biologischen Versuchen wurde ein Verstärker gebaut, der ein mechanisches Zählwerk betreibt. Da das hier benutzte Prinzip der Verbreiterung des Zählstoßes durch Gittergleichrichtung in der Literatur noch nicht erwähnt ist, soll im folgenden kurz darüber berichtet werden.

Die im vorliegenden Fall zu untersuchenden schwachen Präparate ergaben Stoßzahlen in der Größenordnung 20—100/min. Infolgedessen konnte auf das extreme Auflösungsvermögen der NEHER-

HARPER-Schaltung [1] mit ihren Nachteilen (Hochspannung an der Anode der ersten Röhre, Zählrohrmantel am Gitter und dadurch bedingte Störanfälligkeit) verzichtet werden; ebenso erübrigte sich eine Unteretzerschaltung. Im Verstärker muß der Zählrohrstoß, der etwa  $10^{-4}$  sec dauert, verstärkt und verbreitert werden. Letzteres ist zum Betrieb eines mechanischen Zählwerks unbedingt erforderlich, da einmal dessen Induktivität ein sehr schnelles Ansteigen des Stromes verhindert und dann der Anker mechanisch zu träge ist, um so kurzen Stößen zu



folgen. In sehr vielen Fällen wird bei Zählrohrverstärkern diese Verbreiterung mit Hilfe eines Thyratrons [2] oder durch eine Röhrenkippschaltung [3], [4] vorgenommen. Letztere arbeitet sicher sauberer und zuverlässiger als ersteres, doch erfordert sie 2 Röhren. Die hier gezeigte Methode der Stoßverbreiterung kommt mit einer Röhre aus, ohne ein Thyatron zu benutzen.

Aus Abb. 1 ist die Wirkungsweise des Verstärkers zu ersehen: Ein Stromstoß im Zählrohr verursacht

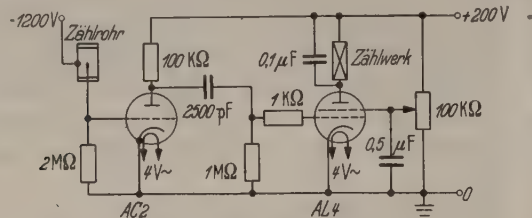


Abb. 1. Zweistufiger Verstärker.

einen Spannungsstoß auf das Gitter der ersten Röhre. Da er in negativer Richtung erfolgt, kann die Röhre mit der Gitterspannung Null betrieben werden, ohne daß der Gitterstrom die Verstärkung merkbar beeinträchtigt. Von der Anode geht dann ein verstärkter positiver Stoß über den Kopplungsblock auf das Gitter der zweiten Röhre, welches ebenfalls das Potential Null hat (der Widerstand von 1 kΩ vor diesem

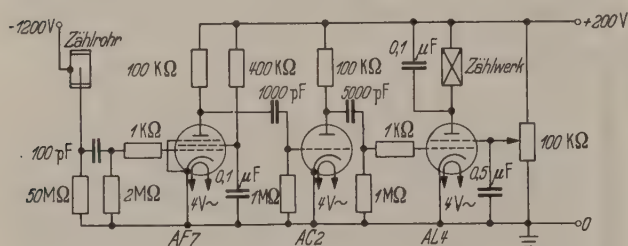


Abb. 2. Dreistufiger Verstärker.

dient in üblicher Weise der Verhütung von Schwingungen). Hier verhindert nun der einsetzende Gitterstrom ein wesentliches Ansteigen des Gitterpotentials; dafür erhält der Kopplungskondensator eine zusätzliche negative Ladung, welche nach Aufhören des Stoßes langsam über den Gitterableitwiderstand abfließt (Zeitkonstante 2,5 msec). In dieser Zeit ist das Gitter negativ und der Anodenstrom entsprechend geringer als vorher. Dieser wird mit Hilfe der Schirmgitterspannung so eingestellt, daß im Ruhestand der Anker des Zählwerks angezogen ist und bei einem Zählstoß losläßt. Der Kondensator parallel zum Zählwerk kompensiert zu einem gewissen Grade die Wirkung von dessen Induktivität, indem er den Stromstoß weiter abflacht.

Die Anwendbarkeit des gezeigten Verstärkers wird durch 2 Bedingungen eingeschränkt: 1. muß das Zählrohr trotz des geringen Ableitwiderstandes einen hinreichend großen Konstanzbereich (etwa

200 V) [5] besitzen, um in genügendem Abstand von der Einsatzspannung arbeiten zu können und dadurch kräftige Stöße zu bekommen; 2. kann wegen der geringen Verstärkung nur ein empfindliches Zählwerk genommen werden (Stromhub zwischen Anziehen und Loslassen 3—5 mA). Die geringe Verstärkung verbietet auch die kapazitive Ankopplung des Zählrohrs mit großem Ableitwiderstand (vgl. Abb. 2). Ersetzt man die Triode AC 2 durch eine Pentode AF 7, dann wird die Verstärkung nur in beschränktem Maße erhöht, da die Gitterstrecke der AL 4 eine verhältnismäßig niederohmige Belastung darstellt.

Zur Vermeidung dieser Beschränkungen wurde ein dreistufiger Verstärker gebaut (Abb. 2). Die Stoßverbreiterung erfolgt hier zunächst in der zweiten Stufe. Die Endstufe war ursprünglich als Verstärker mit negativer Gitterspannung geschaltet. Es zeigte sich indessen, daß der Verstärker wesentlich besser arbeitet, wenn in der Endstufe noch einmal auf die gleiche Art eine Stoßverbreiterung stattfindet. Zu diesem Zweck wird die Endröhre ebenfalls mit der Gitterspannung Null betrieben; der Spannungsstoß hat auch hier infolge der Phasenumkehr in der zweiten Stufe die richtige Polarität. Nebenbei bedeutet der Fortfall der negativen Gitterspannung eine Vereinfachung der Schaltung. In den meisten Fällen ist bei Verwendung einer AC 2 als Eingangsrohre die Verstärkung noch groß genug; die Empfindlichkeit gegen Störungen, besonders durch die Netzfrequenz, ist dann geringer.

Es ist anzunehmen, daß das hier geschilderte Prinzip der Zählrohrstoßverbreiterung durch Gitterstrom praktisch schon Verwendung gefunden hat, ohne daß besonders darauf hingewiesen wurde. So arbeitet in dem Zählrohrverstärker von Goos und EHMANN [6] vermutlich die dritte Röhre trotz der hier überflüssigen negativen Gitterspannung in der oben beschriebenen Art mit Gitterstrom.

### Zusammenfassung.

Es wird über einen Zweiröhren-Zählrohrverstärker ohne Untersetzer berichtet, bei dem die zum Betrieb eines mechanischen Zählwerks notwendige Verbreiterung des Zählrohrstoßes durch Gittergleichrichtung in der zweiten Röhre erzielt wird; der Verwendungsbereich ist durch die geringe Verstärkung beschränkt. Eine für die meisten Fälle ausreichende Verstärkung hat ein Dreiröhrenverstärker, bei dem die Stoßverbreiterung in der oben beschriebenen Art sowohl in der zweiten als auch in der dritten Stufe erfolgt.

Herrn Prof. RAJEWSKY sei für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse gedankt; Herrn Prof. O. SCHÄFER für wertvolle Diskussionen.

**Literatur.** [1] NEHER u. HARPER: Phys. Rev. **49**, 940 (1936). — [2] JAEGER u. KLUGE: Z. Instrumentenkde. **52**, 229 (1932). — [3] GETTING: Phys. Rev. **53**, 103 (1938). — [4] FLAMMERSFELD: Z. Naturforsch. **1**, 168 (1946). — [5] TROST: Z. Phys. **105**, 399 (1937). — [6] Goos u. EHMANN: Phys. Z. **41**, 107 (1940).



## Berichte.

### Aufstellung einer Druckskaie und deren experimentelle Erprobung bis 20000 at.

Von H. EBERT.

(Deutsches Amt für Maß und Gewicht, Berlin und Weida i. Thür.)

Mit 15 Textabbildungen.

(Eingegangen am 1. August 1948.)

#### A. Einführende Betrachtungen.

##### 1. Einleitung.

Die Messung von Drucken bedarf wie die Messung der anderen physikalischen Größe bestimmter Festsetzungen.

Außer Festlegung des Begriffes selbst muß das Meßverfahren angegeben werden. Dazu sind nicht nur Vereinbarungen über die Verfahren, sondern auch über die zu benutzende Einheit notwendig.

Von den Zustandsgrößen der Thermodynamik und die notwendigen Festsetzungen bezüglich des beziffrischen Volumens und der Temperatur getroffen werden. Es fehlen aber in gleich ausführlicher und gründlicher Form solche Festsetzungen für die thermodynamische Zustandsgröße, den Druck.

##### 2. Begriffsbestimmung.

Druck ist das Verhältnis einer auf eine kleine Fläche drückenden Kraft zu der Größe der Fläche Kraft je Flächeneinheit, siehe auch Normblatt DIN-AEF 1314). Dabei ist diese Fläche nur einseitig belastet. Mit dem Zusatz „drückend“ soll die Tatsache hervorgehoben sein, daß die Kraft senkrecht auf Fläche hin wirkt. Dadurch, daß die Fläche selbst „klein“ angenommen wird, soll die gleichmäßige Verteilung der Kraft über der Fläche gesichert sein. Dieser Druck wird auch „absoluter Druck“ genannt. Von ihm werden unterschieden der Über- und der Unterdruck, wenn die gedrückte Fläche beidseitig belastet ist, so daß nur die Differenz der auf ober- wie Unterseite der Fläche vorhandenen Drucke wirksam ist.

Es wird dann von einem Über- bzw. Unterdruck (oberhalb der Fläche) gesprochen, wenn der oberhalb der Fläche vorhandene Druck größer bzw. kleiner ist als der unterhalb der Fläche vorhandene, der Bezugsdruck. Die analoge Festsetzung gilt für die untere Seite der Fläche.

##### 3. Einheiten des Druckes.

Da gemäß Begriffsfestlegung der Druck gleich Kraft durch Fläche ist, ergibt sich für seine Einheit entweder

$$\text{dyn/cm}^2 \left( = \text{ein Mikrobar} = 10^4 \frac{\text{dyn}}{\text{m}^2} \right)$$

oder

$$\text{kp/cm}^2 \left( = \text{eine technische Atmosphäre} = \text{at} \right),$$

wenn das Kilopond als Einheit der Kraft<sup>1</sup> genommen wird.

Es werden daneben noch Einheiten des Druckes verwendet, die sich durch den Gebrauch der auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren beruhenden Flüssigkeitsmanometer eingebürgert haben, indem die den zu messenden Druck das Gleichgewicht haltende Flüssigkeitshöhe angegeben wird. So wird der

<sup>1</sup> Siehe Amtsblatt der PTR 15, 40 (1939).

Druck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0° und dem Normwert der Fallbeschleunigung 1 Torr genannt.

Es gelten die Beziehungen:

$$1 \text{ Bar} = 1,01972 \text{ kp/cm}^2 (\text{at}) = 750,06 \text{ Torr},$$

$$760 \text{ Torr} = 1 \text{ Atm (phys. Atmosphäre)}.$$

##### 4. Druckerzeugung.

Hergestellt werden allseitige Drucke — nur diese sollen hier betrachtet werden — je nach dem Verhalten des zu komprimierenden Stoffes auf verschiedene Art. Bei Erzeugung von Drucken in Gasen, deren Zusammendrückbarkeit besonders groß ist,

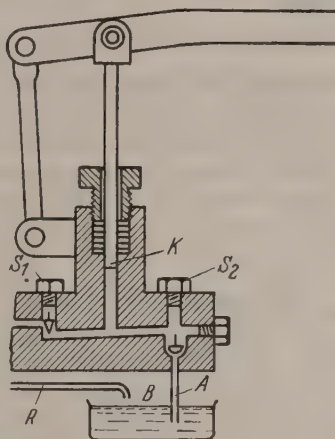


Abb. 1. Druckpresse nach CAILLETET als Beispiel einer Ventildruckpresse.  
A Ansaugstutzen; B Flüssigkeitsvorratsgefäß; R Rückfluß;  
S<sub>1</sub> Druckventil; S<sub>2</sub> Saugventil.

werden meist Vorrichtungen verwendet, die durch häufig wiederholbare Hübe die für das Zusammenpressen notwendige zusätzliche Gasmenge bequem nachliefern: Kompressoren.

Bei Erzeugung von Drucken in Flüssigkeiten, deren Zusammendrückbarkeit gegenüber der von Gasen sehr viel geringer ist, sind 3 Arten von Vorrichtungen (Pressen) am verbreitetsten im Verbrauch:

1. Ventildruckpresse,
2. Schraubenpresse (Druckschraube),
3. hydraulische Presse.

Die Ventildruckpresse ist mit 2 Ventilen (am besten Kugelventilen) — einem Saug- und einem Druckventil — ausgestattet. Ein mittels Stopfbuchse gedichteter Kolben wird unter Verwendung einer Hebelübersetzung im 2-Takt betätigt (Ansaugen und Kompression). Die Vorrichtung (s. Abb. 1) hat den Vorteil, daß sie laufend Übertragungsflüssigkeit nachholt. Ist der Versuchsraum zu groß, so wird infolge des schädlichen Raumes zwischen den Ventilen bei höherem Druck die Druckerhöhung je Hub zu gering. Die in der PTR (bzw. dem DAMG) mit einer Ventildruckpresse erreichten Drucke liegen bei etwa 5000 at.



Die Druckschraube (s. Abb. 2) besteht aus einem Kolben, der mittels einer Schraubenspindel in einen geschlossenen Raum hineingedrückt wird, so daß die zu Beginn vorhandene Druckflüssigkeitsmenge auf kleineren Raum zusammengepreßt wird. Hier ist ein Nachholen der Druckflüssigkeit nicht ohne weiteres möglich, wohl aber kann der Druck nach seiner Erzeugung kontinuierlich auf etwas höhere wie niedrigere Werte geändert werden. Die in der PTR/DAMG

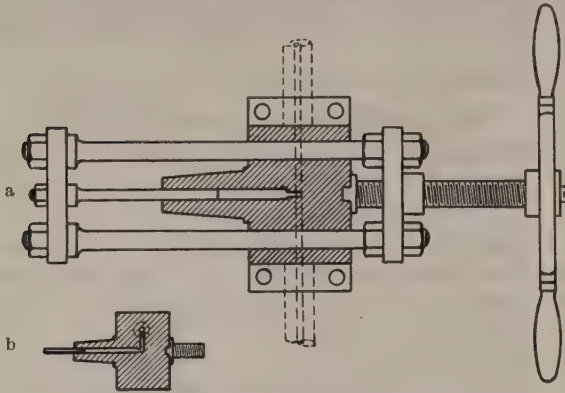


Abb. 2a u. b. Druckschraube, a von oben, b von der Seite gesehen.

mit einer Druckschraube erreichten Drucke sind von der Größenordnung von etwa 2000 at.

Die hydraulische Presse (s. Abb. 3) ist für die Erzeugung sehr hoher Drucke besonders geeignet. Auch bei ihr wird ein Kolben in einen abgeschlossenen Raum hineingedrückt, und zwar durch das Vordrücken eines mit ihm in Verbindung stehenden

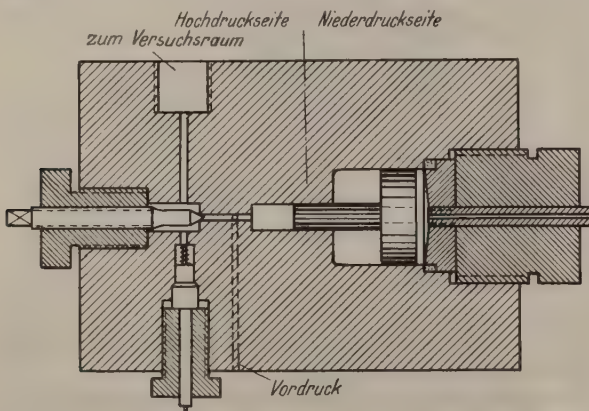


Abb. 3. Schema einer hydraulischen Druckpresse.

zweiten Kolbens von wesentlich größerem Querschnitt. Dieser Kolben größerer Fläche bildet den Abschluß eines Druckraumes (Niederdruckraum), in dem z. B. mittels einer Ventilpresse ein Überdruck hergestellt wird. Unter Einwirkung dieses Überdrucks bewegt sich der große Kolben und treibt den schmalen vor sich her in den Hochdruckraum hinein. Dieses Prinzip bietet die größte Aussicht, besonders hohe Drucke zu erzeugen.

Es sind aber noch besondere Voraussetzungen zum Erreichen dieses Zieles notwendig. Vor allem sind es Forderungen, die an Material sowie die Form des Hochdruckraumes und an die Druckübertragungsflüssigkeit gestellt werden müssen. Das zum Aufbau einer Presse zu verwendende Material muß hohe Festigkeit aufweisen und darf nicht porös sein. Die Gestalt des Raumes ist so durchzubilden, daß mög-

lichst keine sackgassenartige Stellen entstehen, aus denen Gase schwer zu entfernen sind. Jede zurückbleibende Gasblase aber verhindert infolge ihrer starken Komprimierbarkeit das Erreichen eines hohen Druckes.

Das von dem Kolben nicht ausgefüllte und für den Versuch nicht benötigte Volumen — also der schädliche Raum — ist so klein wie möglich zu wählen. Der Hochdruckraum, der den Versuchskörper enthält, wird zwecks gleichmäßiger Übertragung des Druckes gewöhnlich mit einer Flüssigkeit gefüllt, die je nach der gewünschten Höhe des zu erreichenden Druckes auszusuchen ist. Zweckmäßig wird eine solche Flüssigkeit gewählt, die bei mittlerem Druck noch gut liquid bleibt, die bei dem höchsten Meßdruck nicht teigig wird, wohl aber mit steigendem Druck an Zähigkeit zunimmt, damit die Abdichtung

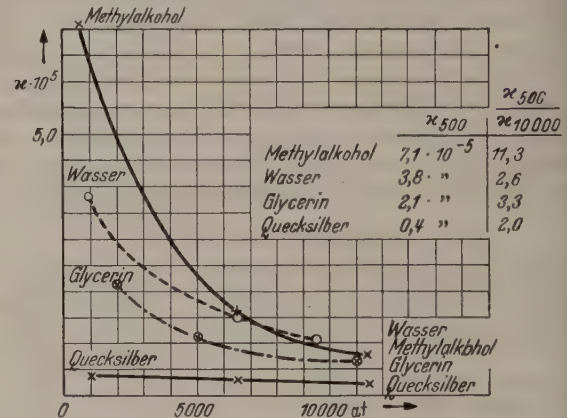


Abb. 4. Kompressibilität einiger Flüssigkeiten in Abhängigkeit vom Druck.

des Kolbens erleichtert wird. Dieses Teigigwerden der Druckflüssigkeit ist wegen des schlechten Druckausgleiches durch sie und in ihr sehr zu beachten.

Auch soll die Übertragungsflüssigkeit eine gewisse Schmierfähigkeit besitzen. Ist dies nicht der Fall, so sind die beweglichen Teile besonders zu schmieren.

Ferner ist bei der Auswahl der Flüssigkeit darauf zu achten, daß deren Kompressibilität gering ist. Andernfalls würde ein beträchtlicher Teil des Hochdruckraumes allein für die Raumgewichtsänderung der Flüssigkeit benötigt werden und für den eigentlichen Zweck der Druckerzeugung verlorengehen. Wie in Abb. 4 gezeigt, nimmt die Kompressibilität von Flüssigkeiten mit dem Druck sehr stark ab. Hat eine Übertragungsflüssigkeit bei niedrigeren Drucken eine hohe Kompressibilität, so kann den dadurch hervorgerufenen Schwierigkeiten durch eine geeignete, im nächsten Absatz dargelegte Versuchsführung begegnet werden. Zur Erläuterung mag als Zahlenbeispiel angegeben werden, daß bei üblicher Kompressibilität  $\frac{1}{3}$  des Volumens bei Erhöhung des Druckes von 1 auf 12000 at allein durch die Raumgewichtsveränderung der Übertragungsflüssigkeit benötigt wird.

Da es im wesentlichen die niedrigeren Drucke sind, bei denen die Flüssigkeit stark kompressibel ist, kann man den Versuch in der Weise durchführen, daß man zwecks Überbrückung dieses Gebietes zu Beginn des Versuches einen Vordruck herstellt. Dieser liegt zweckmäßigerweise zwischen 3000 und 5000 at. Man stellt also zunächst einen hinreichenden Vordruck her, setzt dann die Niederdruckseite der Presse in



trieb, um im Versuchsraum den gewünschten Hochdruck zu erzeugen.

Endlich ist bezüglich der besonderen Eigenschaften der Druckübertragungsflüssigkeit anzustreben, daß eine solche verwendet wird, die die Metallteile der Zelle chemisch nicht angreift und die im Laufe der Zeit nicht harzig wird.

## B. Fundamentale Hochdruck-Meßverfahren.

### B<sub>1</sub>. Die Meßgeräte.

#### 1. Flüssigkeitsmanometer.

Für die Fundamentalmessung eines Druckes eignet sich nur das Flüssigkeitsmanometer, bei dem die Druckkraft durch den Druck an einer Fläche hervorgebrachte

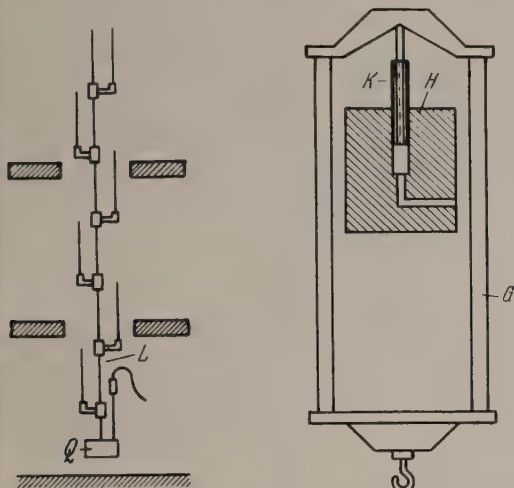


Abb. 5. Mehrstöckiges Flüssigkeitsmanometer. L langer Manometerschenkel; Q Quecksilber-vorratsgefäß.

Abb. 6. Prinzip eines Kolbenmanometers (unterschälige). G Gehänge; H Hohlzylinder; K Kolben (Stempel).

Druckkraft durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule das Gleichgewicht gehalten wird. Flüssigkeitsmanometer im Meßbereich müssen mit Quecksilber gefüllt werden. Wegen der Vergleichbarkeit verschiedener Messungen müssen ferner die üblichen Korrekturen (unter B<sub>2</sub>) angebracht werden. Quecksilbermanometer sind bis etwa 400 at verwendet worden.

Das der PTR/DAMG zur Verfügung stehende Quecksilbermanometer [1], das durch mehrere Stockwerke eines Gebäudes hindurchgeführt wurde, hat einen Meßbereich von 25 at (Schema s. Abb. 5). Der lange Schenkel aus Stahlrohr besitzt sechs abschließbare Abzweigungen aus Glas, in denen der Stand der oberen Quecksilberkuppe beobachtet und mittels Maßstäben ausgemessen wird.

Da verschiedene zusätzliche Forderungen, wie Temperaturkonstanz über den langen Schenkel hinweg, Kenntnis der Kompressibilität als Korrektur für das Raumgewicht des Quecksilbers, nur schwer erfüllbar sind, werden Quecksilbermanometer für Fundamentalmessungen nur bis zu Drucken von 50, allenfalls 100 at verwendet.

#### 2. Kolbenmanometer.

Für sehr hohe Drücke sind bisher keine Meßverfahren bekannt, die als fundamental gelten können. Die für dieses Gebiet benutzten Druckmeßgeräte müssen daher an ein Flüssigkeitsmanometer angegeschlossen werden. Für die Messung solcher hoher Drücke gilt als zuverlässigstes Gerät das Kolbenmanometer

(Druckwaage), bei dem der zu messende Druck aus der Kraft berechnet wird, die auf die Stirnfläche eines Kolbens wirkt, welcher in einem Hohlzylinder eingeschliffen ist. Es werden Kolbenmanometergattungen unterschieden auf Grund der

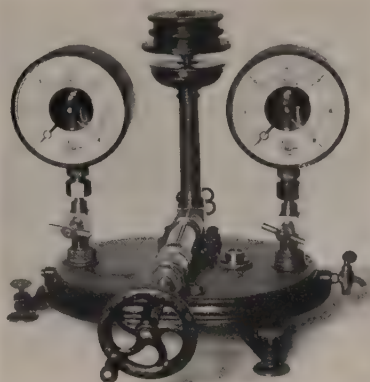


Abb. 7. Manometerprüfgerät mit (oberhalbem) Kolbenmanometer in der Mitte (tellerförmige Verbreiterung des Kolbens [Stempels] zum Tragen der Belastungsgewichte [oberhalb des Kolbens]).

#### a) Anordnung der Belastungsgewichte.

Der Kolben wird durch Gewichte belastet, und zwar mit Hilfe eines Gehänges (Abb. 6 unterschälige), einer tellerförmigen Verbreiterung des Kolbens selbst

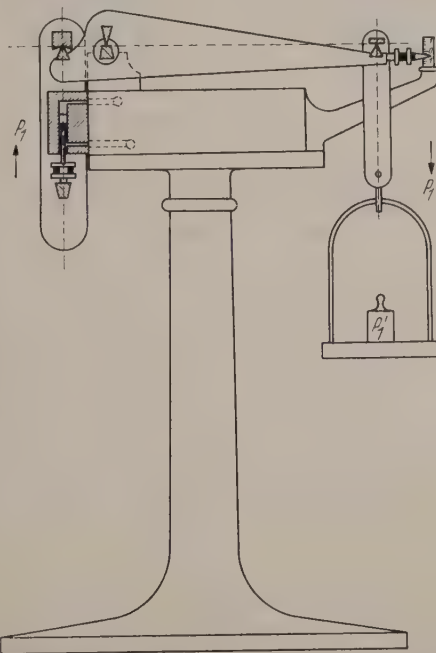


Abb. 8. Gesamtansicht eines Differenz-Kolbenmanometers als Beispiel einer Druckwaage.  $P_1$  die vom Druck erzeugte, durch Waagebalken übersetzte Kraft;  $P_1'$  die vom Hebelarm wirkende Kraft.

an seinem oberen, aus dem Druckraum herausragenden Ende (Abb. 7, oberhalbem) oder eines Hebelarmes (Waagebalken) (Abb. 8, Druckwaage).

#### b) Kolbenform und Dichtungsart.

Neben der Anordnung der Gewichte in ihrer Lage zum Kolben sind die Form des Kolbens und die Art seiner Dichtung wesentlich.

##### b<sub>1</sub>) Kolbenform.

Während für nicht zu hohe Drücke der Kolben möglichst einfach geformt und verhältnismäßig stabil



gemacht wird (Querschnitt meist  $1 \text{ cm}^2$ ), muß man bei höheren Drucken darauf bedacht sein, daß die Zahl der belastenden Gewichtsstücke nicht zu hoch wird. Das kann beispielsweise durch Verwendung eines Hebelarmes erreicht werden, wie das bei der Druckwaage geschieht.

Es ist aber auch möglich, den Querschnitt des Kolbens zu verkleinern ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{20} \text{ cm}^2$ ). Diesem Weg ist aber bald eine Grenze gesetzt, da der Kolben dann zu dünn wird.

Um ohne diese Durchmessererringerung einen kleinen Belastungsquerschnitt zu erhalten, hat man auch einen Differentialkolben eingeführt. Dieser hat zwei verschiedene Durchmesser. Der Druck wirkt auf die Differenz der beiden Kolbenflächen, die nun sehr klein gemacht werden kann, ohne daß der Durchmesser des Kolbens selbst zu klein wird.

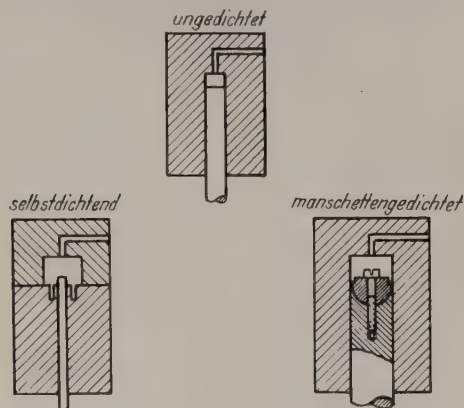


Abb. 9. Die verschiedenen Kolbendichtungen.

Ein Nachteil dieser Kolbenform ist die Tatsache, daß 2 Dichtungen bzw. 2 Einschleifstellen, die zueinander laufen müssen, notwendig sind.

#### b<sub>2</sub>) Kolbendichtung.

α) Ohne zusätzlichen Dichtungstoff. Kann während einer Druckmessung ein geringer Flüssigkeitsverlust in Kauf genommen werden, so ist der Verzicht eines völligen Abdichtens z. B. durch eine Manschette möglich. Es wird alsdann der Kolben besonders sorgfältig in den Hohlzylinder eingeschliffen, so daß der Flüssigkeitsverlust durch Austritt zwischen Kolben und Hohlzylinder auf ein Minimum herabgesetzt wird (ungedichteter AMAGATscher Kolben) (s. Abb. 9, Mitte oben).

β) Mit Manschetten. Zwecks völliger Verhinderung eines Flüssigkeitsaustritts aus dem Spalt zwischen Kolben und Hohlzylinder wird zwischen beiden letzteren eine Manschettendichtung angebracht. Dabei kann die dichtende Manschette entweder am Kolben sitzen — das ist bei den STÜCKRATHSchen Druckwaagen der Fall (s. Abb. 9 rechts unten), — oder am Hohlzylinder.

γ) Mit Nutdichtung. Die Manschettendichtung ist für Drucke oberhalb 2000 at nicht mehr brauchbar. Auch der AMAGATsche Kolben läßt etwa vom gleichen Druck ab zu viel Flüssigkeit durch. Es ist daher auf Vorschlag von BRIDGMAN eine andere Dichtungsart üblich geworden, indem konzentrisch zum Kolben im Hohlzylinder eine Nut gefräst wird, in die hinein der Druck wirken kann. Letzterer preßt die zum Kolben hin liegende ringförmige Lamelle an den Kolben.

Dadurch wird der Spalt zwischen ihm und dem Hohlzylinder mit wachsendem Druck kleiner (Abb. 9 links unten) ja, kann sogar zum völligen Abschluß führen, so daß darauf geachtet werden muß, daß sich der Kolben nicht festfrißt.

B<sub>2</sub>. Die an den unter B<sub>1</sub> aufgeführten Druckmeßgeräten anzubringenden Berichtigungen

#### 1. Flüssigkeitsmanometer.

Die an einem Flüssigkeitsmanometer abgelesenen Höhen sind nur dann untereinander vergleichbar und für die Angabe eines Druckwertes brauchbar, wenn zuvor entsprechende Berichtigungen angebracht worden sind. Diese beziehen sich

##### a) auf den Einfluß der Temperatur.

Es ist sowohl die Temperatur der Manometerfüllflüssigkeit wie die des Maßstabes zu berücksichtigen. Grundsätzlich wäre auch der Quecksilberdampfdruck zu beachten. Indes ist die dadurch bedingte Berichtigung bei den in Betracht kommenden Temperaturen vernachlässigbar.

Die Temperatur selbst darf höchstens auf  $\pm 0,1^\circ \text{C}$  unsicher bestimmt sein.

##### a<sub>1</sub>) Die Manometerfüllflüssigkeit.

Ist der kubische Wärmeausdehnungskoeffizient der Füllflüssigkeit gleich  $\gamma$  (für Hg ist  $\gamma = 0,000182$  je  $1^\circ$ ), so wird die bei der Temperatur  $t$  abgelesene Flüssigkeitshöhe  $h$  auf  $0^\circ \text{C}$  bezogen durch

$$\frac{h}{1 + \gamma t} = h'_0 \quad (1)$$

oder, unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung:

$$h(1 - \gamma t) = h'_0. \quad (1a)$$

##### a<sub>2</sub>) Der Maßstab.

Ablesungen am Maßstab sind ebenfalls auf  $0^\circ$  zu beziehen, da das die Bezugstemperatur für die Längeneinheit ist.

Es ist aber dabei auf die bei der Herstellung der Maßstabteilung zugrunde gelegte Temperatur zu achten.

Ist die Maßstabbezugstemperatur  $0^\circ \text{C}$ , so muß  $h_0$  mit  $(1 + \beta t)$  multipliziert werden, wo  $\beta$  der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient des Maßstabskalenträgers ist.

Dann gilt näherungsweise:

$$h'_0(1 + \beta t) = h\{1 - (\gamma - \beta)t\}. \quad (2)$$

$\gamma - \beta$  ist der sog. scheinbare Wärmeausdehnungskoeffizient der Füllflüssigkeit gegen den Werkstoff der Skale. Für Quecksilber gegen Messing ist  $\gamma - \beta = 0,000163$  und für Quecksilber gegen Glas =  $0,000174$  je Grad.

Ist dagegen die Maßstabbezugstemperatur  $t'$ , so ist der Faktor  $1 + \beta(t - t')$ . Die Gleichung für die Umrechnung lautet dann

$$h'_0\{1 + \beta(t - t')\} = h\{1 - (\gamma - \beta)t - \beta t'\}. \quad (3)$$

##### b) Einfluß der Kapillarität.

Da bei der Verwendung von Flüssigkeitsmanometern nicht beliebig weite Rohre verwendet werden können, ist die Erscheinung der Kapillarität zu



berücksichtigen. Diese wird unwirksam, wenn beide Manometerschenkel gleiche Weite haben und auch sonst die Versuchsbedingungen in beiden Schenkeln die gleichen sind.

Bei Verwendung von Quecksilber in Manometern mit ungleich weitem Schenkel tritt wegen der Nichtbenetzbarkeit Quecksilber gegen Glas ein Kapillarrückdruck auf, der ein zu niedriges Anzeigen der Manometer bedingt (Kapillardepression).

Die dadurch bedingte Berichtigung ist starken Schwankungen unterworfen und daher in ihrem Wert schwer faßbar. Sie ist ceteris paribus eine Funktion der Röhrenweite und der Randwinkel. Beide Größen müssen gegebenenfalls gemessen werden, um die Kapillaritätsberichtigung zu erfassen.

c) Einfluß der Änderung der Fallbeschleunigung.

Da die Fallbeschleunigung ( $g$ ) eine Funktion des Beobachtungsortes ist, muß ihre Änderung durch Bezug der gemessenen Flüssigkeitshöhe  $h$  auf einen Normwert [2]  $g_0 = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  berücksichtigt werden. Das geschieht durch Formel (3)

$$h_0 = h \cdot \frac{g}{g_0}. \quad (4)$$

Ferner kann, sofern keine Sondermessungen der Fallbeschleunigung am Ort vorliegen, angesetzt werden:

$$g = 9,78049 (1 + 0,005288_4 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi - 0,0003 H) \text{ ms}^{-2}. \quad (5)$$

Dabei ist  $\varphi$  die geographische Breite,  $H$  die Ortshöhe über dem Meeresspiegel in m. Für  $\varphi = 45^\circ$  und  $H = 0$  ist  $g = 9,80629 \text{ ms}^{-2}$ .

d) Einfluß der Raumgewichtsänderung der Flüssigkeit.

Wird die Flüssigkeit einem Druck ausgesetzt, so ändert sie infolge ihrer Kompressibilität ( $\kappa$ ) ihr Raumgewicht  $\varrho$ . Beim Berechnen des Gewichtes der Flüssigkeit zum Druck das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitsmenge ist für das Raumgewicht  $\varrho$  anzusetzen

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \kappa \cdot p), \quad (6)$$

hat für Quecksilber den Wert  $3,7 \cdot 10^{-6}$  je at in dem hier in Betracht kommenden Druckbereich. Ist  $h$  die abgelesene Höhe, so ergibt sich für den Druck:

$$p = \frac{\exp(\kappa \varrho_0 h) - 1}{\kappa} = \varrho_0 h + \frac{1}{2} \kappa (\varrho_0 h)^2 + \dots \quad (6a)$$

e) Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe.

Ist das verwendete Flüssigkeitsmanometer ein offenes, so muß die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhendifferenz berücksichtigt werden (0,09 Torr je m Höhendifferenz), sofern der Luftdruck am Fuß des Manometers bestimmt wurde.

## 2. Kolbenmanometer.

a) Die Formeln für die anzubringenden Berichtigungen.

Es sollen nunmehr die Formeln für die Korrekturen (Berichtigungen) angegeben werden, die an den Angaben der Kolbenmanometer anzubringen sind, damit der Druck richtig gemessen wird. Unter Angaben des Kolbenmanometers sind dabei jene Werte

zu verstehen, die man bei der Annahme errechnet, daß der Kolben wirklich genau den vorgesehenen Querschnitt hat, daß sich Kolben und Zylinder unter Druckeinwirkung nicht ändern, daß — bei der Druckwaage — das Hebelarmverhältnis tatsächlich den gewünschten Betrag hat. Die bekannten Berichtigungen der zur Belastung verwendeten Gewichtsstücke sollen bereits berücksichtigt sein.

Es muß aber bei den Kolbenmanometern zur genauen Berechnung des Druckes jener Querschnitt bekannt sein, der während der Messung wirklich belastet wird. Er wird als *wirksamer Querschnitt* bezeichnet.

Es ist die Regel, daß bei manschettengedichtetem Kolben die lichte Weite des Hohlzylinders (bzw. der Durchmesser des Kolbens) maßgebend ist, je nachdem sich die Manschette am Kolben (bzw. am Hohlzylinder) befindet. Der gebräuchlichste Fall bei Kolbenmanometern ist der mit Manschette am Kolben.

Beim AMAGATSchen Kolben berechnet sich der Querschnitt als arithmetisches Mittel zwischen Kolben- und Hohlzylinderquerschnitt.

Für den BRIDGMANSchen Kolben sind besondere Überlegungen notwendig.

Im Falle des manschettengedichteten Kolbens (Manschette am Kolben selbst) erhält man einen Anhaltspunkt über den Wert des Querschnittes beim Überdruck 0, wenn man unter Beachtung besonderer Maßnahmen den Hohlzylinder mit Quecksilber auswägt, seine Länge bestimmt und daraus den Querschnitt errechnet [4].

Wenn auch auf diesem Wege der Wägung ein Kolbenmanometer zu einem absoluten Normalgerät gemacht werden könnte, so ist die damit erreichte Genauigkeit — vor allem auch wegen des Auftretens einer weiteren Korrektur — nicht sehr hoch. Es hat sich aber durch Vergleich mehrerer Druckwaagen, deren wirksame Querschnitte in der angegebenen Weise bestimmt werden, gezeigt, daß dieses Vergleichsverfahren dem des Wägevorganges vorzuziehen ist.

a<sub>1</sub>) Manschettengedichteter Kolben.

Ist nun die Belastung einer Druckwaage am langen Hebelarm  $B$ , so wäre, falls das Hebelverhältnis  $= w$  und die lichte Weite des Hohlzylinders  $= q_0$  (cm<sup>2</sup>) sind, der Druck

$$p = \frac{w \cdot B}{q_0} \text{ (kp/cm}^2\text{)}. \quad (7)$$

Dabei ist darauf zu achten, daß auch wirklich alle Belastungsstücke (z. B. auch das Gewicht der Kolben) in Rechnung gesetzt sind. Setzt man nun statt  $w$  den Wert  $w + \Delta w$  und statt  $q_0$  den Wert

$$q_0 + \Delta' q_0, \quad (7a)$$

so ist der Druck

$$p' = \frac{(w + \Delta w) \cdot B}{q_0 + \Delta' q_0} \approx \frac{w \cdot B}{q_0} \left( 1 + \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta' q_0}{q_0} \right) \quad (7b)$$

$$= p + k_0.$$

Die Korrektur ist also:

$$k_0 = \left( \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta' q_0}{q_0} \right) \cdot p. \quad (8)$$

ein in  $p$  lineares Glied. Dabei sind nur die Glieder, die klein von 1. Ordnung sind, berücksichtigt.



Es ist aber noch eine weitere Berichtigung anzubringen, die sich aus dem elastischen Verhalten des zur Herstellung des Hohlzylinders verwendeten Werkstoffes ergibt.

Der Hohlzylinder (s. Abb. 10) dehnt sich unter Druck. Die Formel für die Dehnung des Inneren eines Hohlzylinders, der wie im vorliegenden Falle nur radial beansprucht wird, lautet nach GRASHOF [5]

$$\varepsilon_1 = \frac{p}{E} \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2} + \frac{m-1}{m} \right) = \frac{p}{E} \cdot K, \quad (9)$$

wobei  $p$  der Innendruck,  $E$  der Elastizitätsmodul,  $r_i$  der innere,  $r_a$  der äußere Radius des Hohlzylinders und  $m$  das Verhältnis der Längsdehnung zur Quer-

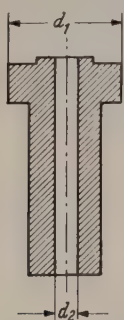


Abb. 10. Form eines Hohlzylinders bei der STÜCKRATHschen Druckwaage  
 $d_1 = 2r_a$   
und  $d_2 = 2r_i$ .

kontraktion ( $\sim 10/3 = \frac{1}{\mu}$  POISSONsche Zahl) ist.

Die Formel (9) hat zur Voraussetzung, daß die Dehnungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze bleiben.

Da die Flächendehnung gleich dem Doppelten der Längsdehnung gesetzt werden kann, so kann für den Querschnitt des Hohlzylinders in Erweiterung des Ansatzes (7a) geschrieben werden:

$$q_0 = q_0 + \Delta' q_0 + \Delta'' q_0, \quad (10a)$$

wo

$$\Delta' q_0 = +2\varepsilon_1 q_0$$

ist. Alsdann wird

$$p'' = p + p \left( \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta' q_0}{q_0} \right) - p \cdot 2\varepsilon_1 = p + k_0 + k_1, \quad (10b)$$

$$k_1 = -2\varepsilon_1 p = -\frac{p^2}{E} \cdot \frac{2r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left( 1,3 \frac{r_a^2}{r_i^2} + 0,7 \right) \left. \vphantom{\frac{p^2}{E}} \right\} \quad (10c)$$

$$= -\frac{K \cdot p^2}{E}$$

Es kommt also noch ein in  $p$  quadratisches Glied hinzu.

Damit sind die Berichtigungen für die manschetengedichteten Kolbenmanometer (Manschette am Kolben) erledigt.

#### a<sub>2</sub>) AMAGATSCHER Kolben.

Außer der Berichtigung  $\Delta' q_0$  ist ebenfalls eine Dehnungskorrektur  $\Delta'' q_0$  anzubringen. Letztere setzt sich aber im Fall a<sub>2</sub> aus 2 Teilen zusammen: Der Dehnung des Hohlzylinders und der Formänderung des Kolbenquerschnittes. Im Falle der elastischen Druckbeeinflussung des Kolbens sind wiederum 2 Beiträge zu beachten. Einmal wird der Kolben unter der Einwirkung der belastenden Gewichtsstücke verformt und außerdem, weil durch den Spalt zwischen Kolben und Zylinderinnenwand Flüssigkeit austritt, durch einen zentripetalen Druck zusammengedrückt. Das Letztere ergibt eine Querschnittsverringerung des Kolbens.

Die Verformung durch die Einwirkung der belastenden Gewichtsstücke kann sich im Sinne sowohl einer Vergrößerung wie einer Verringerung des Kolbenquerschnittes zeigen, je nach der Richtung, in der die Gewichtsstücke wirken, ob sie am Kolben ziehen oder ihn stauchen.

Es ist allgemein anzusetzen:

$$q = q_0 + \Delta' q_0 + \Delta'' q_0, \quad (11a)$$

wo

$$\Delta'' q_0 = \frac{+2\varepsilon_1 q_0 \pm 2\varepsilon_2 q_0 - 2\varepsilon_3 q_0}{2} = \frac{(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3) q_0}{2}. \quad (11b)$$

$\varepsilon_1$  rührt von der Hohlzylinderdehnung her,  $\varepsilon_2$  vom Stauchen oder vom Strecken des Kolbens und  $\varepsilon_3$  vom Komprimieren des letzteren. Die 3-Anteile also verteilen sich auf Zylinder sowie Kolben, und zwar  $\varepsilon_1$  auf Zylinder,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  auf Kolben. Für den wirklichen Querschnitt aber kommt beim AMAGATSCHEN Kolben das arithmetische Mittel in Betracht, daher die 2 im Nenner der Formel (11b).

Es ist

$$\varepsilon_2 = \frac{p}{E} \cdot \mu, \quad (11c)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 - \mu}{E} \cdot p. \quad (11d)$$

$\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  zusammen bewirken eine Querschnittsänderung von

$$\pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \pm \frac{p}{E} \cdot \mu - \frac{p}{E} (1 - \mu) \left. \vphantom{\frac{p}{E}} \right\} \quad (11e)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{p}{E} (1 - 2\mu) = -\frac{\kappa}{3} \cdot p \\ -\frac{p}{E} \end{array} \right.$$

( $\kappa$  = kubischer Kompr. Koeff.).

Daraus ergibt sich

$$p'' = p - p(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = p + k_3, \quad (12a)$$

$$k_3 = -p(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \frac{p^2}{E} (k \pm \mu - 1 + \mu) \left. \vphantom{\frac{p^2}{E}} \right\} \quad (12b)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{p^2}{E} (k - 1) \\ -\frac{p^2}{E} (k - 1 + 2\mu) \end{array} \right.$$

a<sub>3</sub>) BRIDGMANSCHER Kolben (s. Abb. 11).

Bei A: wirksame Querschnittsänderung:

$$-\frac{2\kappa}{3} \cdot p = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot p, \quad (13)$$

bei B: für Kolbenradius  $r_0$ :

$$r = r_0 \left( 1 + \frac{p\mu}{E} \right), \quad (14a)$$

für Zylinder: Zylinderradius  $R$ :

$$R = R_0 (1 - a p). \quad (14b)$$

Dabei ist  $a$  eine vom Elastizitätsmodul des Zylindermaterials und von den Abmessungen abhängige Größe.

Spalt  $s_0$  zwischen Kolben und Zylinder wird bei  $p_0$  geschlossen; also

$$r_0 \left( 1 + \frac{p_0}{E} \right) = (r_0 + s_0) (1 - a p_0); \quad (14c)$$

$$a = \frac{E s_0 - p_0 r_0 \mu}{E p_0 (r_0 + s_0)}, \quad (14d)$$

effektiver Radius

$$\frac{r + R}{2} = \frac{r_0 + R_0}{2} \left( 1 + \frac{\mu - a E}{2 E} p \right), \quad (14e)$$



so Änderung der Fläche:

$$+ \frac{\mu - a \cdot E}{E} \cdot p. \quad (14)$$

Wirksam soll nun das arithmetische Mittel von (13) und (14) sein,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu - aE}{E} \cdot p - \frac{2}{3} \frac{1 - \mu}{E} p \\ \frac{2}{3} (1 - \mu) \end{aligned} \right\} = \frac{p}{2E} \left\{ \mu - aE - \frac{2}{3} (1 - \mu) \right\} = \frac{p}{6E} (3\mu - 3aE - 2 + 2\mu) \quad (15a)$$

$$= \frac{p}{6E} (5\mu - 3aE - 2) = \frac{p}{E} \cdot k', \quad (15b)$$

ann ist die Berichtigung

$$k_4 = - \frac{p^2}{E} \cdot k'. \quad (15)$$

a<sub>4</sub>) Differentialkolben (ungedichtet).

Setzt man aus a<sub>2</sub>) sowohl für den dicken wie für den dünnen Teil des Differentialkolbens die Korrektur  $k_3$  ein, so ergibt sich, daß in diesem Falle als Berichtigung  $k_3$  selbst anzubringen ist, weil die in a<sub>2</sub>) durchgeführte Überlegung auch jetzt gültig ist, so kann man sie auf die belastete Fläche, also  $q_2 - q_1$  beziehen.

a<sub>5</sub>) Differenzkolben (doppeltgedichtet bei A und B) Abb. 12, s. auch unter b<sub>2</sub>β).

Bei  $f_1$ : die gleichen Verhältnisse wie im Falle a<sub>1</sub>). Also

$$k_{f_1} = - \frac{p^2}{E} \cdot k,$$

Bei  $f_2$ : Es kommen 3 Einflüsse in Betracht:

α) beim Zylinder

$$k'_{f_2} = - \frac{p^2}{E} \cdot K,$$

β) beim Kolben (durch den Zylinder nach außen führender Teil mit Querschnitt  $q'_2$ , er ist nach Ausüben belastet mit Z),

β<sub>1</sub>) Quetschen bewirkt Vergrößerung des wirkamen Querschnittes

$$k''_{f_2} = - 2 \frac{p^2}{E} (1 - \mu),$$

β<sub>2</sub>) Stauchen, unter Einwirkung von Z auf  $q'_2$ , bewirkt Verminderung des wirkamen Querschnittes

$$k'''_{f_2} = + \frac{2}{E} \cdot \mu \cdot \frac{Z}{f'_2}.$$

angesamt bei  $f_2$ :

$$k_{f_2} = k'_{f_2} + k''_{f_2} + k'''_{f_2} = - \frac{2p^2}{E} \left\{ \frac{K}{2} + 1 - \mu \left( 1 - \frac{Z}{f'_2 \cdot p} \right) \right\}.$$

Für die Gesamtkorrektur wirken  $k_{f_1}$  und  $k_{f_2}$  gegeneinander:

$$k_{f_1} - k_{f_2} = \left\{ 1 - \mu \left( 1 + \frac{Z}{f'_2 \cdot p} \right) \right\} \cdot \frac{2p^2}{E}.$$

b) Experimentelle Prüfung.

Wenn auch die Verformung an Kolben und Zylinder eines Kolbenmanometers weitgehend theore-

tisch beherrscht werden, so ist doch infolge der bei der Ableitung der Verformungsgleichungen zu machenden Voraussetzungen (unter anderem vollkommene Elastizität, Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes) eine Unsicherheit vorhanden, die es verhindert, daß Kolbenmanometer als primäre Normale betrachtet werden können. So ist versucht worden — und zwar mit gutem Erfolg — die Formeln a<sub>1</sub>) bis a<sub>5</sub>) experimentell zu stützen. Je nach der Höhe des Druckes sind dafür verschiedene Verfahren ausgearbeitet worden.

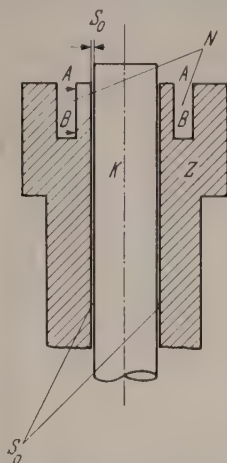


Abb. 11. Schema eines BRIDGMANschen Kolbens. A- und B-Stellen, zum Druckraum hin- bzw. abgewendet; N ringförmige Nut;  $s_0$  Spalt zwischen Kolben (K) und Zylinder (Z).

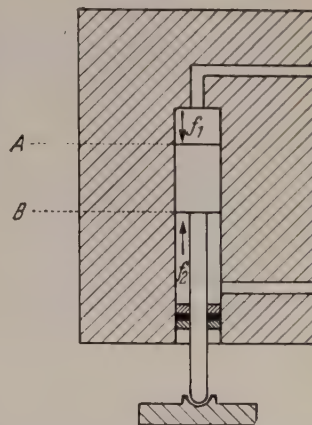


Abb. 12. Doppelt gedichteter (bei A und B) Differenzkolben.  $f_1$  der größere,  $f_2$  der kleinere Querschnitt.

b<sub>1</sub>) Unmittelbare Vergleichsverfahren.

α) Bei nicht zu hohen Drucken (etwa 25 at, im Extremfalle allerdings 400 at) sind Kolbenmanometer unmittelbar mit Quecksilbermanometern verglichen worden [6].

Dabei konnten die theoretisch abgeleiteten Berichtigungen experimentell bestätigt werden.

β) Durch Vergleich von Kolbenmanometern untereinander, deren Kolben und Zylinder möglichst verschiedene Abmessungen haben, kann bei Übereinstimmung der auf Angaben die richtige Erfassung der Korrekturen durch die Formeln geschlossen werden [8].

b<sub>2</sub>) Mittelbare Vergleichs- (Differential-) Verfahren.

α) Es werden 2 Kolbenmanometer unter Zwischenschalten eines Hg-Manometers als Differentialmanometer miteinander verglichen [7] (Abb. 13). Hat letzteres einen Meßbereich von 25 at, so würde der Gang der Vergleichung etwa so verlaufen können:

Hg-Manometer wird mit jedem der beiden Kolbenmanometer, wie unter b<sub>1</sub> α) angedeutet, verglichen.

Alsdann wird eins der Kolbenmanometer mit einem Druck vom doppelten Betrag des Enddruckes (im angenommenen Fall 25 at) belastet. Außerdem wird der Druck mit dem hintereinander geschalteten Hg- und anderem Kolbenmanometer verglichen. Damit wäre ein Druck doppelt so hoch wie der Ausgangsdruck (im Beispiel 2 · 25 at) erreicht. Nunmehr vergleicht man die beiden Kolbenmanometer bei diesem höheren Druck, wie unter b<sub>1</sub> β) beschrieben, untereinander. So lassen sich in Stufen des Enddruckes beim Hg-Manometer 2 Kolbenmanometer



fundamental miteinander vergleichen. Dabei ist die Richtigkeit der unter a) aufgeführten Formel bis zu einem Druck, der den Bestand des Hg-Manometers nicht gefährdet, nachgewiesen worden.

β) Wird der Druck über die Bruchfähigkeit des Hg-Manometers hinaus gesteigert, so ist es möglich, diese Vergleichen nach Art eines Differentialverfahrens fortzusetzen, indem statt des Hg-Manometers ein Kolbenmanometer mit einem besonders gebauten Differenzkolben verwendet wird [9].

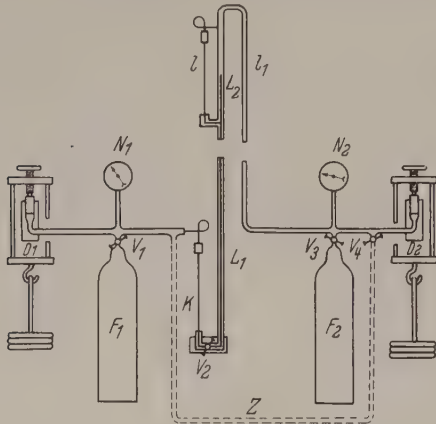


Abb. 13. Anordnung zum Vergleich zweier Kolbenmanometer mit Hg-Manometer als Differentialmanometer.  $K$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  Quecksilbermanometer;  $N_1$ ,  $N_2$  elastische Manometer;  $D_1$ ,  $D_2$  die zu vergleichenden Kolbenmanometer;  $V_1$  bis  $V_4$  Ventile;  $F_1$ ,  $F_2$  Druckflaschen;  $l$  und  $Z$  Verbindungsleitungen.

Dieser Differenzkolben ist ebenfalls in einen Zylinder eingeschliffen (s. Abb. 12), aber so, daß er mit seinem stärkeren Ende die lichte Weite des Zylinders abschließt. Nach unten führt ein dünnerer Teil aus dem Zylinder heraus zu einer Pfanne, die die Differenzkraft aufnimmt.

Durch diesen dünneren Ansatz wird der von unten her belastbare Kolbenquerschnitt ( $f_2$ ) kleiner als der von oben belastbare ( $f_1$ ). Es kann dieses Differenz-



Abb. 14. Spulenhalter eines Widerstandsmanometers.  $E_i$  innere,  $E_a$  äußere Elektrode,  $J$  Isolation.

kolbenmanometer auch als gewöhnliches Kolbenmanometer benutzt werden, indem nur  $f_1$  belastet wird. Alsdann können die beiden zu vergleichenden Kolbenmanometer sowohl untereinander, wie auch jedes für sich, nach  $b_1 \beta$ ) mit dem als gewöhnliches Kolbenmanometer verwendeten Differenzkolbenmanometer verglichen werden. Diesen Vergleichen sind weitere hinzuzufügen, indem  $f_1$  mit  $p_1$  und  $f_2$  mit  $p_2$  belastet werden. Dann wird von oben mit Druck  $p_2$ , von unten mit  $p_1$  belastet. Das muß immer so eingerichtet werden, daß

$$p_1 \cdot f_1 - p_2 f_2 > 0 \quad \text{bzw.} \quad p_2 f_1 - p_1 f_2 > 0$$

ist, damit stets eine nach unten gerichtete Kraft auf das Gehänge wirkt, die ausgewogen werden kann. Es lassen sich mit den aus diesen Vergleichen sich ergebenden Gleichungen Aussagen über die Gültigkeit der Voraussetzungen machen, unter denen die

Formeln unter a) abgeleitet sind. Es zeigt sich, daß diese Voraussetzungen und damit die daraus gefolgerten Schlüsse richtig sind [9]. Das ist bis 5000 at geschehen.

### C. Ausbaumöglichkeit der Verfahren durch Verwendung elektrischer Widerstandsmanometer.

#### 1. Notwendigkeit einer Konvention.

Indem für die bei dem Fundamental- bzw. Quasifundamentalmeßverfahren verwendeten Geräte die mitgeteilten Korrekturen angebracht werden, wird unmittelbar auf die verwendete Druckeinheit (s.  $A_1$ ) Bezug genommen. Das ist aber nicht immer mit einfachen Mitteln möglich, so daß besondere Vergleichen, bzw. Verabredungen getroffen werden müssen, um Einheitlichkeit zu erreichen, vor allem bei Drucken oberhalb 2000 at. Das unter B  $b_2 \beta$ ) angegebene Verfahren ist in der bisher angewendeten Weise für Drucke oberhalb 5000 at nicht mehr durchführbar.

So ist man auf eine Konvention angewiesen, die eine größtmögliche Eindeutigkeit und eine größtmögliche Annäherung an das Fundamentalverfahren gewährleistet.

Das kann auf dem Weg einer konventionellen Druckskaie geschehen.

Es wird bei einer Druckmessung angestrebt, die Maßzahl des herrschenden Druckes zu finden, jene Zahl, die angibt, wie oft die Einheit in dem zu messenden Druck enthalten ist. Unter diesem Gesichtspunkt müssen die verschiedenen Meßverfahren durchgedacht werden, um die mit ihnen beobachteten Werte auf die Einheit zu beziehen. Dazu sind jene Berichtigungen angegeben worden, wobei auch zugleich die Grenzen der Verwendbarkeit mitgeteilt wurden.

Um auch oberhalb der bisher angegebenen Drucke noch messen zu können, wurde nun ein Extrapolationsverfahren angewendet, zu dessen Durchführung ein weiteres Meßprinzip herangezogen wurde.

#### 2. Das elektrische Widerstandsmanometer.

Dieses weitere Meßprinzip beruht auf der Änderung des elektrischen Widerstandes durch allseitigen Druck.

Als Werkstoff für die Spule dieses Widerstandsmanometers dient Manganin, das einen verhältnismäßig hohen Druck-, aber einen kleinen Temperaturkoeffizienten seines elektrischen Widerstandes hat. Andere wesentlich geeignetere Legierungen sind bisher noch nicht gefunden worden [10]. Die Spule befindet sich an einem Halter, dessen innere Elektrode isoliert in den Hochdruckraum geführt ist und an ihrem erweiterten, zum Druckraum hinführenden Ende hohlkegelförmig hergerichtet ist (s. Abb. 14).

Es ist nun bezüglich der Druckskaie so verfahren worden, daß man den Koeffizienten des Widerstandsmanometers bis 5000 at mit den fundamental angeschlossenen Kolbenmanometern bestimmt hat. Dabei wurde festgestellt, daß sich der elektrische Widerstand von thermisch richtig vorbehandeltem emaillierten [11] Manganindraht innerhalb etwa 30/00 linear mit dem Druck ändert. Nunmehr wurde angenommen, daß oberhalb 5000 at sowohl die Formeln für die Kolbenmanometerberichtigungen noch gelten, als auch die lineare Druckabhängigkeit des Manganins bestehen bleibt.



Wenn nun zugleich mit einem Kolben- und einem Widerstandsmanometer ein Druck gemessen wird, die aus beider Angaben errechneten Drucke gegeneinander aufgetragen werden, müßte eine gerade Linie mit 45°-Neigung gefunden werden. Das ist nun in der Tat der Fall, und zwar bis 10 000 at auf etwa 1%, bis 12 000 at auf 10<sup>0</sup>/<sub>100</sub> (1%) reproduzierbar. Ist daher diese Extrapolation als erwiesenermaßen richtig betrachtet worden.

Damit wäre die Druckscale bis 12 000 at festgelegt.

### D. Erweiterung des Meßbereiches; Experimentelle Stütze, Konvention über die Druckscale.

Für noch höhere Drucke, die mit einer hydraulischen Druckpresse erzeugt werden, ist das Kräftegleichgewicht am Pressekolben selbst als Ausgangspunkt für eine Erweiterung des Bereiches der Druckskala benutzt worden [12].

#### 1. Erweiterung des Meßbereiches.

Wird auf der Hochdruckseite einer hydraulischen Druckpresse ein Widerstandsmanometer eingebaut, so kann der mit ihr erreichte Druck gemessen, so kann bis 12 000 at innerhalb eines Prozentes sicher (unter C) geschehen. Gleichzeitig wird auf der Niederdruckseite der dort herrschende Druck gemessen. Dabei ist es gleichgültig, mit was für einem Instrument das geschieht.

Bildet man nun  $\Delta p$ , die Differenz  $p_n$  (aus Niederdruck · Übersetzungsverhältnis) —  $p_w$  (aus Widerstandsmanometer) und trägt man diese Differenzen in Abhängigkeit von  $p_n$  auf, so ergibt sich unabhängig von Übersetzungsverhältnis und unabhängig von der Reibung stets eine quadratische Beziehung zwischen  $\Delta p$  und  $p_n$  (aus Niederdruck) (s. Abb. 15).

Da nun bis 12 000 at das Widerstandsmanometer fundamental bestimmt worden ist, können die Werte zu diesem Druck gewissermaßen zur Einmessung der Anlage dienen.

#### 2. Experimentelle Stütze.

Bis 12 000 at wird also die quadratische Gleichung aus den bisherigen Fundamentalversuchen numerisch bestätigt. Alsdann extrapoliert man diese Gleichung und erhält auf diese Weise die Differenzen, die von dem aus dem Niederdruck errechneten Werten abzunehmen sind, um den richtigen Druckwert auf der Hochdruckseite zu erhalten.

Werden diese Werte dann mit den experimentell mittels Widerstandsmanometer gefundenen ver-

glichen, so stimmen diese Druckwerte innerhalb 2% untereinander überein.

Im einzelnen sind die in den Tabellen 3 und 4 aufgeführten Zahlen erhalten worden.

Tabelle 3. Übersetzungsverhältnis: 18,75.  
Differenz  $\Delta p = -5 - 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot p_n + 6,5 \cdot 10^{-6} \cdot p_n^2$ .

$p_n$ aus Niederdruck mittels Übersetzungsverhältnis abgeleitet	Druck in at nach Differenzgleichung berechnet	$p_w$ am Widerstandsmanometer beobachtet lineare Extrapolation	Abweichung in %
7500	7143	7100	+0,6
9380	8818	8890	—0,8
11250	10438	10530	—1,0

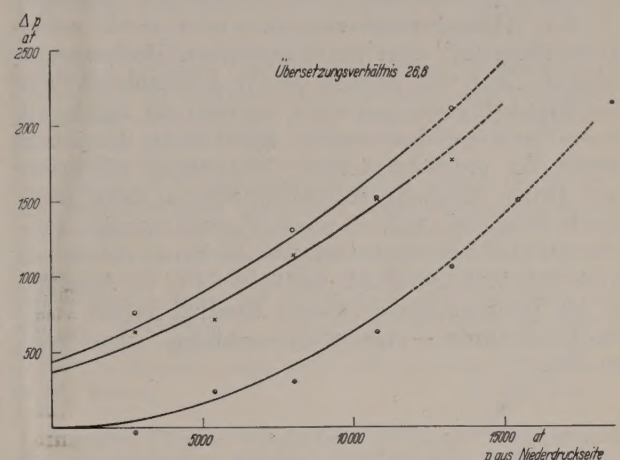


Abb. 15. Die quadratischen  $\Delta p$ -Kurven bei einem Übersetzungsverhältnis 26,6 und verschiedenen Reibungswerten.

Beim anderen Übersetzungsverhältnis liegen die Dinge ähnlich (Tabelle 4).

Aus diesen Werten kann geschlossen werden, daß von dem verwendeten Manganindraht der elektrische Widerstand innerhalb 2% (und weniger) linear mit dem Druck verläuft.

Weiter kann daraus gefolgert werden, daß innerhalb einer prozentischen Unsicherheit von 2% die Druckscale bis etwa 20 000 at festgelegt ist.

Diese Verfahren hat den grundsätzlichen Vorzug, mit dem Fortschritt im Bau von Hochdruckpressen und einer damit verbundenen Erweiterung des Druckbereiches Schritt halten zu können. Sobald also auf hydraulischem Wege Drucke über 20 000 at erreicht werden, läßt sich auf dem eben dargelegten Weg eine sichere Druckmessung angeben. Es wäre naturgemäß

Tabelle 4. Übersetzungsverhältnis: 26,6.

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } p &= -14,1 + 3 \cdot 10^{-3} \cdot p + 6,1 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 \\ \text{b) } p &= 336 + 67,5 \cdot 10^{-3} \cdot p + 3,5 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 \\ \text{c) } p &= 430 + 71,3 \cdot 10^{-3} \cdot p + 4,06 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 \end{aligned} \right\} \quad p \text{ in at.}$$

$p_n$ Niederdruck mittels Übersetzungsverhältnis abgeleitet	a) berechnet nach a)	$p_w$ beobachteter Wider- standsmanometer linear extrapolar	Abweichung in %	b) berechnet nach b)	$p_w$ beobachtet	Abweichung in %	c) berechnet nach c)	$p_w$ beobachtet	Abweichung in %
10800	—	—	—	9327	9285	+0,5	—	—	—
13300	12195	12240	—0,4	11447	11530	—0,7	11204	11190	+0,1
15960	14372	14370	±1	—	—	—	13358	13160	+1,2
18620	16463	16480	—0,1	—	—	—	15454	15200	+1,5
19950	17476	17530	—0,3	—	—	—	16482	16080	+2



möglich, dieses Verfahren auch durch ein besonderes Gerät zu verwirklichen (hydraulisches Kolbenmanometer), wodurch sogar eine höhere Genauigkeit erwartet werden kann.

### 3. Konvention über die Druckske.

Als Druckske sollen daher zur Zeit dienen die Angaben eines

Hg-Manometers bis 25 at,

Kolbenmanometers bis 5000 at,

Widerstandsmanometers bis 12000 at,

hydraulischen Manometers oberhalb 12000 at, zunächst erprobt, bis 20000 at.

Die Manometer sind nach Maßgabe der hier dargelegten Gesichtspunkte fundamental zu bestimmen.

Das Widerstandsmanometer wird nach seiner Herstellung mit dem zu erwartenden Höchstdruck belastet. Hat sich danach der Widerstandswert für den Druck 0 nicht geändert, so wird die Spule als brauchbar angesehen und ihr Koeffizient, der ja auf Grund der experimentellen Erfahrungen als linear vom Druck abhängig betrachtet werden kann, etwa durch Vergleich mit einem Kolbenmanometer zwischen 0 und 2000 at bestimmt. Es kann, sofern ein Kolbenmanometer nicht verfügbar ist, in Analogie zu der Temperaturske dieser Koeffizient mit Hilfe von Fixpunkten — einer würde genügen — bestimmt werden.

### E. Fixpunkte der Druckske.

Als Fixpunkte werden vorgeschlagen [13] die Erstarrungspunkte von Hg bei

0° C 7640 at,

30° C 13715 at.

Übergang I → II-Wismuth [14] bei

30° C 25420 at,

75° C 23350 at.

Mit diesen Festsetzungen ist die Messung auch höchster Drucke weitgehend festgelegt und gesichert.

### F. Schlußbemerkung.

Es scheinen die Dinge so weit herangereift, daß eine internationale Vereinbarung getroffen werden könnte.

**Literatur.** [1] HOLBORN, L. u. F. HENNING: Ann. Phys. Lpz. (4) **26**, 833 (1908). — [2] Normwert von  $g_0$ . 3. Conf. gen. poids et mesures 1901, S. 66 u. 68. — [3] HEISKANEN, CASSINIS: Bull. géodésique **26**, 40 (1930). — [4] WIEBE, H. F.: Z. Instrumentenkde. **30**, 205 (1910). — [5] MEISSNER, W.: Z. Instrumentenkde. **30**, 137 (1910). — [6] HOLBORN, L. u. A. BAUMANN: Ann. Phys., Lpz. (4) **31**, 945 (1910). — [7] HOLBORN, L. u. H. SCHULTZE: Ann. Phys., Lpz. (4) **47**, 1089 (1915). — [8] HOLBORN, L.: Ann. Phys., Lpz. (4) **54**, 503 (1917). — [9] EBERT, H.: Phys. Z. **36**, 385 (1935). — [10] EBERT, H. u. J. GIELESSEN: Ann. Phys., Lpz. (6) **1**, 229 (1947). — [11] SCHULZE, A.: Phys. Z. **39**, 300 (1938). — [12] WAGNER, E. u. P. P. KOCH: Ann. Phys., Lpz. (4) **31**, 31 (1910). — [13] BRIDGMAN, B. W.: Physics of high pressure. London 1931. — [14] BRIDGMAN: Proc. amer. Acad. **74**, 7 (1940). — Rev. Mod. Phys. **18**, 1 (1946).

### CARL RAMSAUER

zum 70. Geburtstag.

Am 6. 2. 49 wird CARL RAMSAUER 70 Jahre alt. Wegen seiner langen Tätigkeit im Forschungsinstitut der AEG haben gerade alle, die angewandte Physik treiben, Grund, ihm herzlich zu gratulieren. Sie erinnern sich seiner vielen Leistungen und Erfolge. Sie freuen sich, daß er heute noch so rüstig und tatkräftig ist, und hoffen, daß das noch recht lange so bleiben möge. Sie wünschen, daß ihm das Geschick auch weiterhin Gesundheit und geistige Spannkraft erhält.

Einen genaueren Lebenslauf unseres Jubilars niederzuschreiben und eine eingehende Würdigung seiner Arbeiten zu geben, ist nicht nötig, da zu seinem 60. Geburtstag in der Zeitschrift für Technische Physik, Band 20, Jahrgang 1939, Seite 33 ein ausführlicher Aufsatz steht, der alles Wissenswerte enthält.

Die wichtigsten Daten in RAMSAUERS Leben sind:

Geboren am 6. 2. 1879 zu Osterburg (Oldenburg),

Studium in München, Tübingen, Berlin und Kiel,

1902—1906 wissenschaftlicher Mitarbeiter im Torpedo-Laboratorium Kiel,

seit 1907 im LENARDSchen Institut in Heidelberg,

1915 a. o. Professor dort,

1914—1918 im 1. Weltkrieg und dann Weiterarbeit in Heidelberg,

1921 o. Professor für Physik an der Technischen Hochschule Danzig,

1928 Übernahme der Leitung des neugegründeten Forschungsinstitutes der AEG in Berlin-Reinickendorf.

Diese Stellung füllte RAMSAUER bis zum Ende des 2. Weltkrieges aus. Seit Kriegsschluß ist er o. Professor und Direktor des Physikalischen Institutes an der Technischen Universität Berlin und beaufsichtigt als freier Mitarbeiter der AEG deren physikalische Arbeiten.

Hier soll weder von der durch RAMSAUER entdeckten Anomalie des Wirkungsquerschnittes von Argon-Atomen gegenüber langsamen Elektronen, also vom RAMSAUER-Effekt, gesprochen werden, noch von den vielen sonstigen Leistungen bis 1939. Der Chronist will vielmehr auf die letzten 10 Jahre eingehen. Da ist an erster Stelle die Tätigkeit RAMSAUERS als Vorsitzender der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 1940—1945 zu nennen. Er hat sich dabei, wie SOMMERFELD kürzlich feststellte, den Dank der Physiker verdient. Wenn auch die äußeren Erfolge seiner Anstrengungen naturgemäß nicht groß sein konnten, so hat er doch gemeinsam mit anderen manch Schlimmes verhütet und dafür gesorgt, daß die Grundlagen erhalten blieben, auf denen die Deutsche Physikalische Gesellschaft wieder aufbauen kann. Ein weiteres großes Verdienst hat sich RAMSAUER durch seine unermüdliche Tätigkeit im Dienste der Ausbildung des Physikernachwuchses erworben. Seit vielen Jahren warnt RAMSAUER vor den Gefahren



Spezialistentums und betont auf Grund seiner eigenen Erfahrungen aus der industriellen Praxis die Wichtigkeit einer gründlichen allgemein-physikalischen Bildung. Wie klar und lebhaft waren doch die Ausführungen in seinem Vortrag in Darmstadt 1947! Wenn auch die Ansichten über die zweckmäßige Ausbildung der Physiker in einzelnen Punkten auseinandergehen, so zeigte doch dieser Vortrag in aller Deutlichkeit, daß unser Jubilar noch so jung wie je im physikalischen und industriellen Leben steht. Über die wissenschaftlichen Leistungen

RAMSAUERS seit Kriegsbeginn, die naturgemäß nicht öffentlich bekannt werden konnten, ist der Chronist nicht orientiert, doch ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, daß auch während des Krieges im Forschungslaboratorium der AEG allerhand beachtliche Ergebnisse erzielt worden sind. Wir wünschen CARL RAMSAUER, daß ihm nach den schweren Jahren der Kriegs- und Nachkriegszeit noch ein sonniger, auch wissenschaftlich erfolgreicher Lebensabend beschieden sein möge.

W. O. SCHUMANN.

## Buchbesprechungen.

**L. Pungs: Grundzüge der Hochfrequenztechnik.** 2. Aufl., 1. (Bücher der Technik. Herausgeber Dr.-Ing. H. KU-  
KAMP. Notdruck.) Wolfenbüttel-Hannover: Wolfen-  
bütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. 1948. DIN A 4. 109 S.  
10 Abb. Geh. M 7.50.

Das Buch ist erschienen als Notdruck im Rahmen der „Bücher der Technik“. Es ist eine Zusammenfassung der gleichnamigen Vorlesung des Verfassers an der Technischen Hochschule Braunschweig und befaßt sich mit den Grundelementen der Langwellentechnik, der Wellenausbreitung im freien Raum, den Resonanzkreisen und den Antennen. Abließend werden aus didaktischen Gründen noch einige weitere Verfahren zur Schwingungserzeugung (gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen) besprochen.

H. H. MEINKE.

**C. Schäfer und L. Bergmann: Grundaufgaben des physikalischen Praktikums.** Bearbeitet von W. KLIEFOTH, 4. Aufl., Leipzig: Teubner 1948. Preis krt. M 5.80.

Das Buch bringt auf 210 Seiten mit 180 Abbildungen „Grundaufgaben des physikalischen Praktikums“. Es ist für Anfänger aller Fakultäten geschrieben, auch für Mediziner. In einem einleitenden, auch für „erwachsene Physiker“ lesenswerten Kapitel werden die Novizen eindringlich in die Kunst des Beobachtens und Messens eingeweiht. Die Wahl der Aufgaben aus allen Gebieten der Physik bringt nichts Ungewöhnliches. Bei jeder Aufgabe ist zunächst das Prinzip, die theoretische Grundlage so weit dargestellt, daß der Praktikant nicht auf eine Einführung durch den Assistenten warten muß. Es folgt eine Beschreibung der Versuchsanordnung und der Ausführung der Messung, endlich eine kurze Zusammenfassung unter der Überschrift „Gang der Messung“.

Wer, wie der Referent, lange Jahre hindurch das Angerpraktikum geleitet hat, weiß, welche Schwierigkeiten den Studenten immer wieder über- und welche unter-  
stützt werden, und erkennt in der Abfassung des Stoffes eine große didaktische Erfahrung der Verfasser. Zweifellos steht gerade jetzt ein großes Bedürfnis nach einem derartigen, schlichten und zuverlässigen Praktikumsbuch.

V. ANGERER.

**W. Magnus und F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für spezielle Funktionen der mathematischen Physik.** 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1948. M 24.60.

Die Funktionen der mathematischen Physik spielen eine immer größere Rolle in theoretischen, physikalischen und technischen Untersuchungen. Meist braucht man jedoch für nur die fertigen Formeln und Eigenschaften dieser Funktionen ohne Beweise. Der Mühe des Nachschlagens in umfangreichen mathematischen Werken oder entlegenen Einzelarbeiten und, wie es wohl viele gemacht haben, des Legens einer eigenen Formelsammlung wird man durch das vorliegende und verdienstvolle Werk der Verf. entoben. Es enthält in übersichtlicher Anordnung einen großen Teil der bekannten Ergebnisse über die Gamma-Funktion, die hypergeometrische Funktion, die Zylinder- und Kugelfunktionen, die konfluente hypergeometrische Funktion, die elliptischen Integrale, Theta-Funktionen und elliptischen Funktionen und die wichtigsten Systeme von Orthogonal-

polynomen. Die bekannteren Integraltransformationen, besonders die Fourier- und Laplacetransformation, sind mit umfangreichen Zusammenstellungen von Ober- und Unterfunktionen vertreten. Die Formeln für die Differentialoperatoren und die Wellengleichung werden in den wichtigsten orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen angegeben. Ein Anhang enthält einige Fourierreihen, Partialbruch- und Produktdarstellungen elementarer Funktionen und einige Summenformeln. Gegenüber der ersten Auflage ist das Kapitel über elliptische Funktionen vollkommen umgearbeitet und wesentlich erweitert worden; die Kapitel über die allgemeine und die konfluente hypergeometrische Funktion, die Gammafunktion und die Zylinderfunktionen sind durch größere Zusätze ergänzt. Die Formeln sind sehr zuverlässig, die Zahl der Druckfehler ist trotz der Schwierigkeit des Satzes gering; meist sind sie unmittelbar zu erkennen. Das Buch ist für alle wertvoll, die mit einer der genannten Funktionen zu tun haben.

J. MEIXNER.

**Siegfried Flügge: Theoretische Optik. Die Entwicklung einer physikalischen Theorie.** Wolfenbüttel u. Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. 1948. 124 S. Geh. M 4.—.

Unter den verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik eignet sich zweifellos gerade die Optik für eine Darstellungsweise, die die historische Entwicklung in den Vordergrund rückt. Der Jahrhundert alte Widerstreit zwischen Wellen- und Korpuskulartheorie des Lichtes mag zwar nur für uns, die wir erst vor 2 Jahrzehnten ihre Synthese in der Auffassung von der dualen Natur des Lichtes und der Materie erlebt haben, ein mehr als historisches Interesse besitzen. Als Beispiel für die Entwicklung einer Disziplin, in der manche Auffassungen kamen und vergingen, hat die historische Entwicklung der Optik einen besonderen didaktischen Wert. Und so versucht der Verf. „am Beispiel der Optik darzulegen, was eine physikalische Theorie ist, wie sie entsteht, wie sie begrenzt ist, wie sie einer besseren weichen muß, mit einem Wort, was es bedeutet theoretischer Physiker zu sein“. Ein Drittel des Buches handelt daher von der NEWTONschen Korpuskularkoptik, der HUYGHENSSchen Wellentheorie, der elastischen Lichttheorie; die elektromagnetische Lichttheorie kommt verhältnismäßig kurz weg, Interferenz und Beugung, Dispersion, gedämpfter strahlender Dipol, Optik bewegter Körper und ein Überblick über die moderne Lichtquantenvorstellung und ihre Anwendung in der Theorie der Hohlraumstrahlung sind der übrige Inhalt. Die Knappheit geht auf Kosten des Stoffes, nicht der Darstellung. Diese ist einfach, klar und daher für den Studenten, an den als Leser in erster Linie gedacht ist, gut verständlich. Reizvoll sind die zahlreichen und geschickt ausgewählten Zitate aus den Klassikern der Optik.

J. MEIXNER.

**Fr. A. Willers: Elementar-Mathematik, ein Vorkurs zur Höheren Mathematik.** Dresden u. Leipzig: Theodor Steinkopff 1948. 260 S. M 16.—.

Das Buch, nur wenig Kenntnisse insbesondere aus der Geometrie voraussetzend, enthält eine Zusammenfassung der Elementarmathematik: Arithmetik und Algebra, Trigonometrie und Analytische Geometrie; nur die Behandlung der Determinanten und der allgemeinen Kegelschnittgleichung sowie die Darstellung der Vektoralgebra gehen über den



Rahmen der Schulmathematik hinaus. Auch der Stil ist an manchen Stellen der in Schulbüchern übliche, meist jedoch den Bedürfnissen des Selbststudiums entsprechend. Der angehende Mathematiker würde aber enttäuscht sein, wenn er etwa eine strenge Definition der Irrationalzahlen, eine strenge Durchführung der Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte einer Geraden oder eine strenge Begründung des Rechnens mit komplexen Zahlen darin suchen würde. Im Zusammenhang mit der HESSESchen Normalform der Geradengleichung und mit den Polarkoordinaten werden leider immer noch absolute Beträge verwendet, obwohl auf die Nachteile dieses Vorgehens verschiedentlich, namentlich von K. KOMMERELL hingewiesen wurde. Viele Aufgaben, deren Lösungen am Schluß angegeben werden, bieten Stoff zu Übungen.

FRANK LÖBEL.

**Wolfgang Haack: Differential-Geometrie.** Teil 2. Wolfenbüttel u. Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. 1948. 131 S. M 5.—.

Erfreulich rasch folgte auf den erst kürzlich besprochenen 1. Teil des Buches der 2. Teil; er erfüllt die durch den ersten geweckten Hoffnungen.

Zunächst wird eine Einführung in den Ricci-Kalkül (Tensorkalkül) gegeben, der, unter der Annahme einer beliebig hohen Dimensionszahl  $n$  entwickelt, bald auf die Krümmungstheorie der Flächen angewandt wird und in eine Behandlung der beltramischen Differentialparameter einmündet. Sehr zu begrüßen ist es, daß diesem Verfahren, dem die durch eine quadratische Differentialform gegebene Maßbestimmung zugrunde liegt, die Methode der invarianten Ableitungen zur Seite gestellt wird, die sich auf ein  $n$ -Tupel von linearen Differentialformen gründet. Es wird dann auch ihre Anwendung auf verschiedene Fragen der Flächentheorie gezeigt; so werden die WEINGARTENSchen Flächen und andere spezielle Arten von Flächen behandelt.

Der größere Teil des Buches ist der Liniengeometrie gewidmet. Von Anfang an werden PLÜCKERSche Koordinaten verwendet, die, vektoriell entwickelt, mit Hilfe der von CLIFFORD eingeführten dualen Zahlen in den von STUDY benutzten dualen Vektoren zusammengefaßt werden. Dadurch wird eine sachgemäße Behandlung der Reguli, der linearen Kongruenzen und der linearen Komplexe im euklidischen Raum erreicht, deren jeder sich schließlich als durch einen dualen Vektor darstellbar erweist.

Es folgt die differentialgeometrische Untersuchung der Regelflächen; die Benützung der genannten Hilfsmittel gestattet ein den üblichen Umfang überschreitendes Eingehen auf die Eigenschaften dieser Gebilde, wobei auch kinematische Gesichtspunkte gestreift werden. Das gleiche gilt, sogar in erhöhtem Maß, von der interessanten Darstellung der Theorie der allgemeinen Strahlensysteme oder -kongruenzen und der allgemeinen Strahlenkomplexe. Es werden die zu den Strahlenkongruenzen gehörigen ausgezeichneten Flächen, insbesondere die Brennflächen und Mittenflächen in anregender Weise untersucht. Die isotropen Strahlensysteme und ihr Zusammenhang mit den Minimalflächen werden besonders besprochen, ebenso die W-Strahlensysteme. Die LAPLACESchen Folgen werden betrachtet, schließlich die parabolischen Strahlensysteme in Zusammenhang mit der Flächentheorie gebracht. Die Gelegenheit zu lehrreichen Seitenblicken auf Fragen der Optik, unter anderem auf den MALUS-DUPINSchen Satz, läßt sich der Verf. nicht entgehen. Sehr wertvoll ist die Darstellung der Theorie der Strahlenkomplexe.

In allen Teilen des Buches spielen die Ableitungsformeln als die grundlegenden Gleichungen aller Differentialgeometrie, aus denen regelmäßig die Integrabilitätsbedingungen, die fundamentalen Beziehungen zwischen den Invarianten fließen, die ihnen gebührende Rolle.

Wenn schließlich noch der eine oder andere Wunsch geäußert werden darf, so wäre es vor allem der, daß bei der Einführung der dualen Zahlen dem Lernenden bewiesen werden sollte, daß das so einfache Rechnen mit ihnen nicht zu Widersprüchen führen kann. In dieser Hinsicht geht die Darstellung nicht über die von BLASCHKE vor fast 25 Jahren zum erstenmal in einem Lehrbuch gegebene Einführung hinaus. Die Differentialgeometrie der Strahlengebilde leidet

immer noch unter der geringen Anschaulichkeit der meisten der eingeführten Differentialinvarianten, obwohl ihre anschauliche Deutung schon vor langer Zeit von ANTONI und ZINDLER erschöpfend gegeben wurde. Diese kleinen Beanstandungen mindern aber nicht den Wert des ungemein reichhaltigen Buches, dessen Studium nur angelegentlich empfohlen werden kann.

FRANK LÖBEL.

**Gerhard Schubert: Kernphysik und Medizin,** mit einem Geleitwort von Prof. Dr. HEINRICH MARTIUS, 1. Aufl. 1948. 2. Aufl. 1948. Göttingen: Muster-Schmidt. 344 S. Preis M 24.50.

Noch vor kurzer Zeit war die Kernphysik ein kleines Teilgebiet der Atomphysik, mit dem sich nur ganz wenige Spezialisten befäßen. In den letzten Jahren hat sie sich mit erstaunlicher Schnelligkeit vorwärts entwickelt und dabei nicht nur der Physik selbst, sondern auch anderen Wissenschaften ganz neuartige und bedeutende Hilfsmittel in die Hand gegeben. Dadurch entstand auch ein starkes Bedürfnis nach Büchern, welche den Vertretern dieser Naturwissenschaften die Grundlagen der Kernphysik und die für sie wichtigsten Einzelheiten nahebringen.

Das Buch von SCHUBERT hat sich die Aufgabe gestellt, dem Mediziner die für ihn wesentlichen Teile der Kernphysik zu übermitteln und ihn auf ihre Anwendungsmöglichkeiten auf biologischem Gebiet hinzuweisen. Es ist dem Verf. gelungen, diese Aufgabe auf eine in jeder Hinsicht befriedigende Weise zu lösen. Das Buch ist in 2 Teile gegliedert. Der erste allgemeine Teil bringt die physikalischen Grundlagen der Kernphysik und behandelt die Wirkung ionisierender Strahlungen auf den Organismus. Der zweite, praktische Teil befaßt sich mit den für die kernphysikalischen Messungen des Mediziners notwendigen Apparaturen und Meßgeräten.

Im allgemeinen Teil wird erst das Atom und seine wichtigsten Eigenschaften beschrieben. Dann folgt ein Abschnitt über Radioaktivität und einer über künstliche Umwandlung von Atomkernen. In diesen 3 Abschnitten sind die physikalischen Grundlagen, soweit sie den Mediziner interessieren, in kurzer aber vollkommen ausreichender Form dargestellt. Der folgende Abschnitt bringt allgemein die biologische Wirkung ionisierender Strahlen. Sein Inhalt steht mit der Kernphysik nur in losem Zusammenhang. Die meisten in ihm mitgeteilten Erkenntnisse waren schon mit Hilfe von Röntgenstrahlen gewonnen. Sie bilden jedoch für das Verständnis des Folgenden eine wesentliche Voraussetzung. Der V. Abschnitt behandelt die therapeutische Anwendung verschiedener Strahlungsarten. Weitaus am umfangreichsten ist der VI. Abschnitt, der die Indikatormethode bringt. Diese wichtige Methode ist durch eigene Versuche des Verf., die als Beispiele gebracht werden, sehr anschaulich erläutert. Am Ende des Abschnitts werden in einer 10 Seiten langen Tabelle die Arbeiten über radioaktive Indikatoren aufgezählt. Diese Tabelle vermittelt ihrer Anlage nach einen guten Überblick, ist in bezug auf neuere Arbeiten allerdings recht unvollständig. Die beiden letzten Abschnitte des ersten Teils behandeln die genetischen Wirkungen der Strahlungen im allgemeinen und speziell der Erdaktivität und der kosmischen Strahlung.

Im praktischen Teil handelt der I. Abschnitt von der Erzeugung und dem Nachweis der in der Kernphysik bedeutsamen Strahlungen und von den Trennverfahren für die in Frage kommenden Atomarten. Im II. Abschnitt wird die Herstellung radioaktiver Präparate beschrieben, im III. Abschnitt werden wesentliche Angaben zur Technik der Indikatoruntersuchungen gemacht; der IV. Abschnitt handelt von der Dosimetrie, der V. Abschnitt von Strahlenschäden und Strahlenschutz. Das folgende Schriftumsverzeichnis enthält rund 500 Zitate. Erstaunlich ist die geringe Zahl der nach 1943 erschienenen angeführten Arbeiten, was nicht darauf zurückzuführen ist, daß keine Arbeiten mehr erschienen sind, sondern eine Folge der noch bestehenden Schwierigkeiten in der Beschaffung ausländischer Literatur sein dürfte.

Die 2. Auflage zeigt gegenüber der ersten nur verhältnismäßig wenige Änderungen. Es sind einige geringfügige Fehler und Versehen ausgemerzt, und es ist im letzten Abschnitt ein ausführlicher Bericht über die Wirkungen der Atom-bombe angefügt.

WOLFGANG RIEZLER.